Alan Turing, un mirall geomètric i un problema d’un milió de dòlars

Al llibre “La nova ment de l’Emperador” Sir Roger Penrose argumenta que la consciència humana no és algorítmica i, per tant, no es pot simular amb una màquina de Turing. A aquesta pregunta li segueixen de forma natural qüestions més tangibles: Quins sistemes físics poden ser no-computacionals? És l’hidrodinàmica capaç de realitzar càlculs? (Cris Moore, 1991). Pot un sistema mecànic (incloent la trajectòria d’un fluid) simular una màquina de Turing universal? (Terence Tao, 2017).

El moviment d'un fluid incompressible sense viscositat es regeix per les equacions d'Euler. Si el fluid es viscos ve donat per les equacions de Navier-Stokes, la regularitat de les quals és un dels problemes encara oberts a la llista de problemes del mil·lenni de la fundació Clay. Les trajectòries d'un fluid són complexes. Però, podem mesurar els seus nivells de complexitat (computacional, lògica, topològica i dinàmica)?

En aquesta lliçó tractarem aquestes preguntes. En particular, explicarem com construir un flux d'Euler tridimensional Turing-complet. La indecidibilitat de certes trajectòries de fluids és una conseqüència de la indecidibilitat clàssica del problema d'aturada demostrat per Alan Turing l’any 1936. Aquesta és una manifestació de complexitat en hidrodinàmica molt diferent de la teoria del caos.

La nostra solució de les equacions d'Euler es correspon a una solució estacionària o camp de Beltrami. Per aquesta construcció, utilitzarem un mirall [5] que reflecteix els camps de Beltrami com a camps de Reeb d'una geometria de contacte. Així, les nostres solucions importen tècniques de geometria per resoldre un problema de dinàmica de fluids. Però, com de generals són els fluxos d'Euler? Podem representar qualsevol dinàmica com un flux d'Euler? Abordarem aquest problema d'universalitat fent servir de nou aquest mirall Beltrami / Reeb utilitzant el h-principi de Gromov. També considerarem el cas no estacionari. Aquestes propietats d'universalitat són un indicador més de la seva complexitat. Tot i així, aquesta construcció no és “física” en el sentit que la mètrica associada no és la mètrica euclidiana. Acabarem aquesta lliçó amb un anunci d’una construcció Euclidiana i de les seves implicacions a complexitat i indecibilitat.

Aquestes construccions [1,2,3,4] estan motivades pel treball de Terence Tao[7,8,9] per abordar el problema de Navier-Stokes que també explicarem.

[1] R. Cardona, E. Miranda, D. Peralta-Salas, F. Presas. Universality of Euler flows and flexibility of Reeb embeddings. Preprint.
[2] R. Cardona, E. Miranda, D. Peralta-Salas, F. Presas. Constructing Turing complete Euler flows in dimension 3. Proc. Natl. Acad. Sci. 118 (2021) e2026818118.
[3] R. Cardona, E. Miranda, D. Peralta-Salas. Turing universality of the incompressible Euler equations and a conjecture of Moore. Int. Math. Res. Notices, , 2021;, rnab233, https://doi.org/10.1093/imrn/rnab233
[4] R. Cardona, E. Miranda, D. Peralta-Salas. Computability and Beltrami fields in Euclidean space. Preprint.
[5] J. Etnyre, R. Ghrist. Contact topology and hydrodynamics I. Beltrami fields and the Seifert conjecture. Nonlinearity 13 (2000) 441–458.
[6] C. Moore. Generalized shifts: unpredictability and undecidability in dynamical systems. Nonlinearity 4 (1991) 199–230.

[7] T. Tao. On the universality of potential well dynamics. Dyn. PDE 14 (2017) 219–238.
[8] T. Tao. On the universality of the incompressible Euler equation on compact manifolds. Discrete Cont. Dyn. Sys. A 38 (2018) 1553–1565.
[9] T. Tao. Searching for singularities in the Navier-Stokes equations. Nature Rev. Phys. 1 (2019) 418–419.