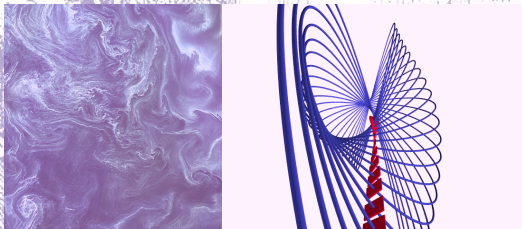


# Alan Turing, un mirall geomètric i un problema d'un milió de dòlars

Inauguració Curs SCM

Eva Miranda

*UPC-CRM*



# Recordeu aquest anunci?



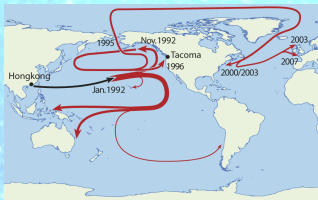
On the 12th of January 1992 the merchant ship "Old Susan", sailing the Hong Kong San Diego line, was caught in a terrible storm and lost all its cargo. More than 20 000 rubber ducks ended up in the Pacific, floated across the Alaska seas and south into the Atlantic Ocean.

Fourteen years and six thousand miles later, the inhabitants of Strathclyde in Scotland woke up to the unusual sight of thousands of ducks invading their coastline. Life is full of surprising endings.

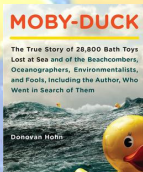
SEAT Sealed. Unexpected endings.



# El viatge dels *friendly floatees*

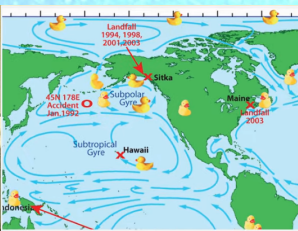


- **10 de Gener de 1992:** El carguer Ever Laurel va sortir de Hong-Kong amb destinació Tacoma. Al viatge una tempesta va fer perdre 29000 ànecs de goma.
- **16 de Novembre de 1992:** 10 aneguts de goma apareixen a Sitka, Alaska.
- **July 2007:** Un aneguet de goma apareix a Escòcia encara que s'esperaven molts més...



# Què hem après dels 29000 aneguts de goma?

- **Curtis Ebbesmeyer** va estudiar els corrents oceànics seguint les restes de naufragis, icebergs i ampolles (amb missatges).



- Utilitzant **OSCURS** (Ocean Surface Currents Simulation), un simulador desenvolupat per l'oceanògraf de Seattle **Jim Ingraham**, **Ebbesmeyer** s'ha pogut seguir la deriva de restes a l'oceà..
- Gràcies als **friendly floaters** es van poder fer algunes prediccions.



- Només es recuperen un **2% dels missatges** a una ampolla.

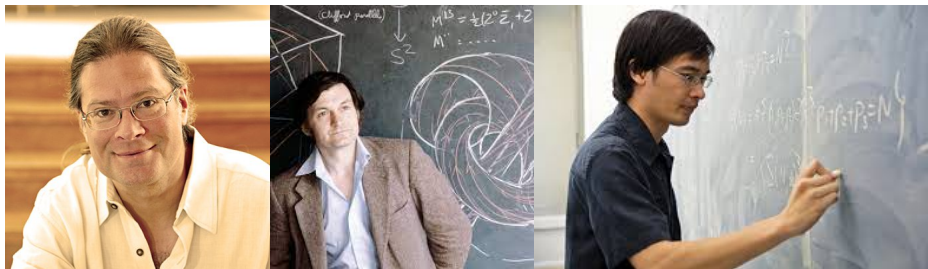
# Complexitat computacional i dinàmica de fluids

A la natura els fluids (aigua de l'oceà, lava dels volcans) sovint es rebel·len contra el que s'espera...

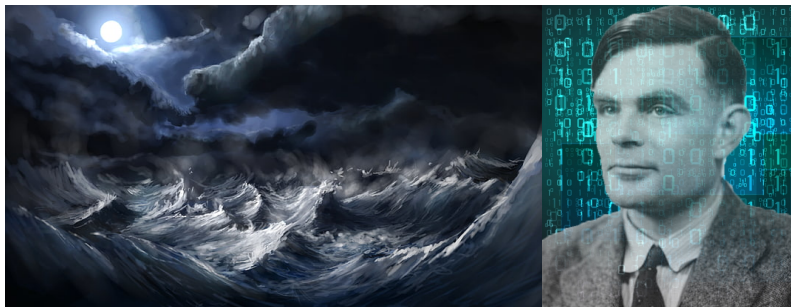


# Computadors d'aigua?

Són els fluids suficientment "*complicats*" per fer càlculs?



Poden els fluids simular qualsevol màquina de Turing?



# Turing conegut per desxifrar Enigma

**Alan Turing** : I like solving problems, Commander. And Enigma is the most difficult problem in the world.

**Commander Denniston** : Enigma isn't difficult, it's impossible. The Americans, the Russians, the French, the Germans, everyone thinks Enigma is unbreakable.

**Alan Turing** : Good. Let me try and we'll know for sure, won't we?

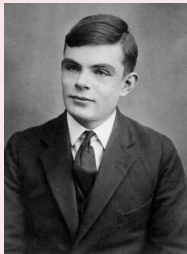


# Màquines de Turing i el problema de la parada

En teoria de la computabilitat **el problema de la parada** és el següent problema de decisió:

donada una descripció d'un programa i el seu estat inicial, determinar si el programa, quan executa aquesta entrada, s'atura (**estat de parada o halting**) o continua de manera indefinida.

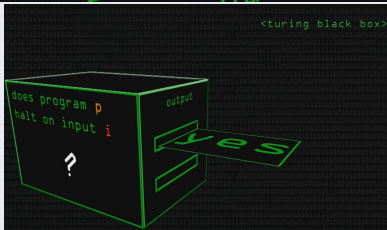
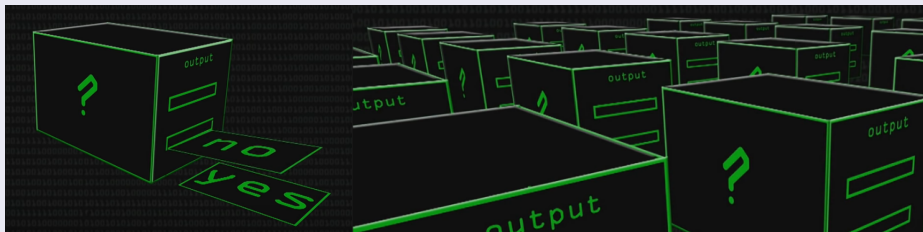
**Turing, 1936: El problema de la parada és indecidible.**



Alan Turing va demostrar l'any 1936 que no existeix un algorisme general per resoldre el problema de la parada per totes les possibles parelles programa-entrades.

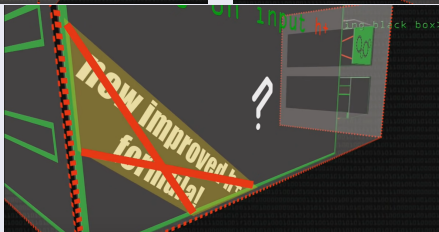
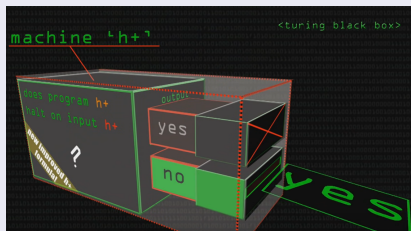
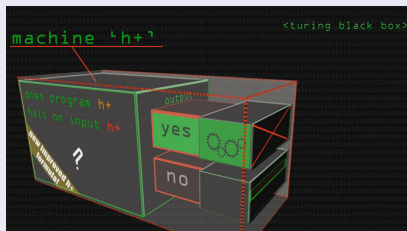
# El problema de la parada

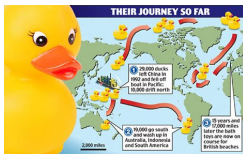
Proof.



# Demostració amb dibuixos

## Proof.





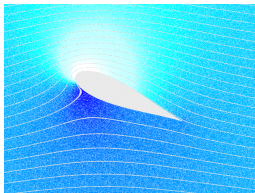
- **1991, Moore:** Es pot usar la hidrodinàmica per fer càlculs?
- **10 Gener de 1992:** 29000 ànecs de goma es perden a l'oceà.
- **Juliol 2007:** Un aneguet de goma apareix a Escòcia.
- **Juliol 2017:** Tao pregunta si els fluxos d'Euler són **universals**.
- **Novembre 2019:** (Cardona--M.--Peralta-Salas --Presas) Els fluxos d'Euler estacionaris són universals.
- **Desembre 2020:** (Cardona--M.--P-S-- Presas) Existeixen fluxos d'Euler estacionaris Turing-complets en dimensió 3.
- **Abril 2021:** (Cardona--M.--P-S ) Existeixen fluxos d'Euler t-dependent Turing-complets en grans dimensions.
- **Abril 2021:** (Cardona--M.--P-S ) Existeixen fluxos d'Euler Turing complets en dimensió 3 amb la mètrica Euclidiana.

# treball conjunt amb Cardona, Peralta-Salas i Presas



- R. Cardona, E. Miranda, D. Peralta-Salas, F. Presas. *Universality of Euler flows and flexibility of Reeb embeddings*. arXiv:1911.01963.
- R. Cardona, E. Miranda, D. Peralta-Salas, F. Presas. *Constructing Turing complete Euler flows in dimension 3*. PNAS, Proceedings of the National Academy of Sciences, 2021, 118 (19) e2026818118.
- R. Cardona, E. Miranda, D. Peralta-Salas, *Turing universality of the incompressible Euler equations and a conjecture of Moore*. International Mathematics Research Notices, 2021, rnab233, <https://doi.org/10.1093/imrn/rnab233>.
- R. Cardona, E. Miranda, D. Peralta-Salas, *Computability and Beltrami fields in Euclidean space*. arXiv:2111.03559.

# Fluids incompressibles en varietats Riemannianes



Equacions d'Euler clàssiques a  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} + (X \cdot \nabla)X = -\nabla P \\ \operatorname{div} X = 0 \end{cases}$$

L'evolució d'un **fluid no viscos i incompressible** a una varietat Riemanniana de dimensió  $n$ ,  $(M, g)$  ve donada per les **equacions d'Euler**:

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \nabla_X X = -\nabla P, \quad \operatorname{div} X = 0$$

- $X$  és la **velocitat** del fluid: un camp vectorial no autònom a  $M$ .
- $P$  és la **pressió interna** del fluid: una funció escalar a  $M$  que depèn del temps.

# Fluids incompressibles a varietats Riemannianes

Si  $X$  no depèn del temps defineix un **flux d'Euler estable o estacionari**: modela el flux d'un fluid en equilibri.

$$\nabla_X X = -\nabla P, \quad \operatorname{div} X = 0,$$

$$\iff i_X d\alpha = -dB, \quad dt_X \mu = 0, \quad \alpha(\cdot) := g(X, \cdot)$$

amb  $B := P + \frac{1}{2}\|X\|^2$  la **funció de Bernoulli**.

## campos de Beltrami:

$$\operatorname{curl} X = fX, \text{ con } f \in C^\infty(M) \quad \operatorname{div} X = 0.$$

## Exemple (Camps de Hopf a $S^3$ i camps ABC a $T^3$ )

- Els camps de Hopf  $u_1 = (-y, x, \xi, -z)$  i  $u_2 = (-y, x, -\xi, z)$  són camps de Beltrami a  $S^3$ .
- Els camps ABC  
 $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (A \sin z + C \cos y, B \sin x + A \cos z, C \sin y + B \cos x),$   
 $((x, y, z) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3)$  són de Beltrami.

# Els problemes del mil·lenni (Llista Clay)

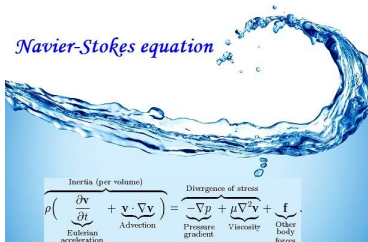
Els set problemes del mil·lenni foren escollits per una institució privada de [Cambridge, Massachusetts](#) (EUA), l'Institut Clay de Matemàtiques, la resolució dels quals seria premiada, segons va anunciar el Clay Mathematics Institute l'any 2000, amb la suma d'un milió de dòlars per cadascun.

La llista és la següent:

- [P versus NP](#)
- [Conjectura de Hodge](#)
- [Hipòtesi de Riemann](#)
- [Existència de Yang-Mills i del salt de massa](#)
- [Existència i unicitat](#) de les solucions de les [equacions de Navier-Stokes](#)
- [Conjectura de Birch i Swinnerton-Dyer](#)
- [Conjectura de Poincaré](#) (resolta)



# El problema de Navier-Stokes: Existència de solucions globals llises



The *Navier–Stokes* equations are then given by

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} u_i + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0),$$

$$(2) \quad \operatorname{div} u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0)$$

with initial conditions

$$(3) \quad u(x, 0) = u^\circ(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Here,  $u^\circ(x)$  is a given,  $C^\infty$  divergence-free vector field on  $\mathbb{R}^n$ ,  $f_i(x, t)$  are the components of a given, externally applied force (e.g. gravity),  $\nu$  is a positive coefficient (the viscosity), and  $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  is the Laplacian in the space variables. The *Euler equations* are equations (1), (2), (3) with  $\nu$  set equal to zero.

The *Navier–Stokes* equations are then given by

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} u_i + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0),$$

$$(2) \quad \operatorname{div} u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0)$$

with initial conditions

$$(3) \quad u(x, 0) = u^\circ(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Here,  $u^\circ(x)$  is a given,  $C^\infty$  divergence-free vector field on  $\mathbb{R}^n$ ,  $f_i(x, t)$  are the components of a given, externally applied force (e.g. gravity),  $\nu$  is a positive coefficient (the viscosity), and  $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  is the Laplacian in the space variables. The *Euler*

**(A) Existence and smoothness of Navier–Stokes solutions on  $\mathbb{R}^3$ .** Take  $\nu > 0$  and  $n = 3$ . Let  $u^\circ(x)$  be any smooth, divergence-free vector field satisfying (4). Take  $f(x, t)$  to be identically zero. Then there exist smooth functions  $p(x, t), u_i(x, t)$  on  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$  that satisfy (1), (2), (3), (6), (7).

**(C) Breakdown of Navier–Stokes solutions on  $\mathbb{R}^3$ .** Take  $\nu > 0$  and  $n = 3$ . Then there exist a smooth, divergence-free vector field  $u^\circ(x)$  on  $\mathbb{R}^3$  and a smooth  $f(x, t)$  on  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ , satisfying (4), (5), for which there exist no solutions  $(p, u)$  of (1), (2), (3), (6), (7) on  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ .

# El programa de Tao sobre universalitat d'Euler



Existeix un embedding d'un camp incompressible com un camp d'Euler a un espai de dimensió més gran?

## El programa de Tao i Navier-Stokes

És possible construir fluxos d'Euler que siguin Turing-complets? Motivació: crear una dada inicial “**programada**” per evolucionar com una versió reescalada d'ella mateixa (com una màquina autoreplicant de Von Neumann). Es pot aplicar aquesta idea per aconseguir *blow-up/explosió* de la solució de les equacions de Navier-Stokes?

# Podeu trobar les 7 diferències?



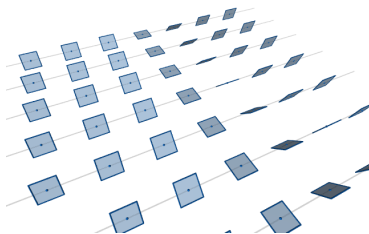
Figure: Barcelona i Paris al desembre

Potser si pero si estàs suficientment lluny no les trobaràs....

Tot sistema dinàmic es pot representar com un flux d'Euler



# Noves eines: Geometries associades a formes diferencials



## Simplèctica

$$\dim M = 2n$$

2-forma  $\omega$ , no-degenerada  $d\omega = 0$

teorema de Darboux  $\omega = \sum_{i=1}^{2n} dx_i \wedge dy_i$

Hamiltonià  $\iota_{X_H}\omega = -dH$

## Contacte

$$\dim M = 2n + 1$$

1-forma  $\alpha$ ,  $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$

$$\alpha = dx_0 - \sum_{i=1}^{2n} x_i dy_i$$

Reeb  $\alpha(R) = 1$ ,  $\iota_R d\alpha = 0$

$$\text{Ham.} \begin{cases} \iota_{X_H} \alpha = H \\ \iota_{X_H} d\alpha = -dH + R(H)\alpha. \end{cases}$$

# Un exemple

El nucli de la 1-forma  $\alpha$  en  $M^{2n+1}$  defineix una estructura de contacte si  $\alpha \wedge (d\alpha)^n$  és una forma de volum  $\Leftrightarrow d\alpha|_{\xi}$  és no-degenerada.

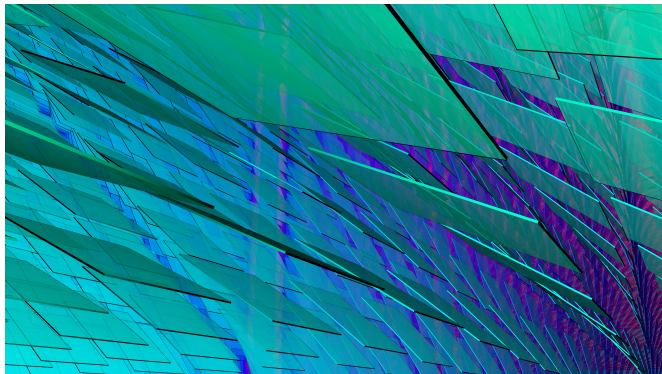
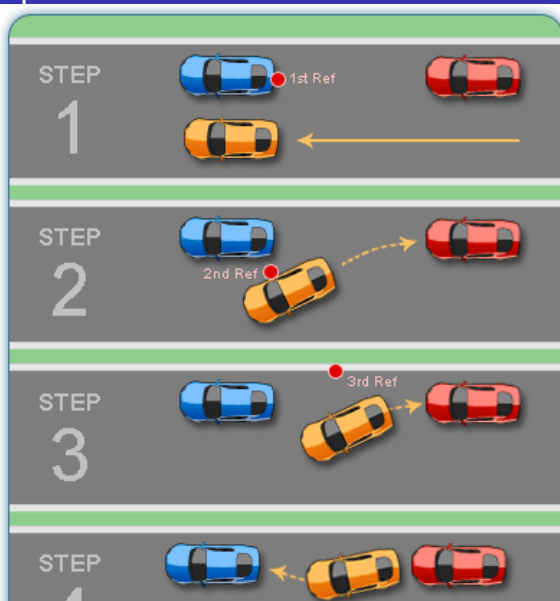


Figure: Estructura de contacte estàndard a  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\alpha &= dz - ydx & \xi &= \ker \alpha = \text{Span}\left\{\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\right\} & d\alpha &= -dy \wedge dx = dx \wedge dy \\ & & & & \Rightarrow \alpha \wedge d\alpha &= dx \wedge dy \wedge dz\end{aligned}$$

# La geometria de contacte ens explica perquè no es pot aparcar a la primera...





# La geometria de contacto ens explica perquè no es pot aparcar a la primera...

**Theorem 17.** *A car of length  $L$  can be parallel parked in any space of length  $L + \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ .*

*Proof.* Let us assume that the car is on the plane  $\mathbb{R}^2$ . Its position can be described by a single coordinate  $(x, y)$  and the angle  $\theta \in S^1$  its tires are facing, or equivalently a point in the configuration space  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ , which has contact form

$$\alpha = \sin \theta dx - \cos \theta dy.$$

(Note that  $\alpha \wedge d\alpha = -dx \wedge dy \wedge d\theta$ , so we will reverse the usual orientation of  $S^1$ .) The car's path  $\gamma(t) = (x(t), y(t), \theta(t))$  will satisfy  $\frac{dy}{dx} = \tan \theta$ , or equivalently  $\frac{dx}{dt} \sin \theta - \frac{dy}{dt} \cos \theta = 0$ : thus  $\gamma(t)$  must be Legendrian. We now take a path through configuration space which pulls the car up parallel to the parking spot and then slides it horizontally into place without turning the wheel; this is physically impossible, but an arbitrarily close Legendrian approximation will successfully park the car.  $\square$

# La fibració de Hopf i els camps de Reeb

- $S^3 := \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 \mid |u|^2 + |v|^2 = 1\}, \alpha = \frac{1}{2}(ud\bar{u} - \bar{u}du + vd\bar{v} - \bar{v}dv)$ .

Les òrbites del camp de Reeb defineixen la fibració de Hopf.

$$R_\alpha = iu \frac{\partial}{\partial u} - i\bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + iv \frac{\partial}{\partial v} - i\bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{v}} = (iu, iv).$$

- $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$  en coordenades de Hopf  $(z_1, z_2) = (\cos s \exp i\phi_1, \sin s \exp i\phi_2)$ ,  $s \in [0, \pi/2]$ ,  $\phi_{1,2} \in [0, 2\pi)$ . El camp de **Hopf**  $R := \partial_{\phi_1} + \partial_{\phi_2}$  és un camp **de Beltrami** respecte la mètrica estàndard de l'esfera.

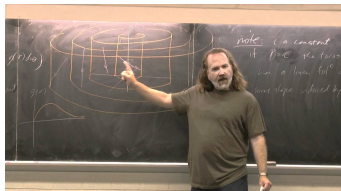


Figure: Meme per Niles Johnson

# Un mirall màgic

En termes de  $\alpha = \iota_X g$  i la forma de volumen  $\mu$  les **equacions estacionàries d'Euler** s'escriuen:

$$\begin{cases} \iota_X d\alpha = -dB \\ d\iota_X \mu = 0 \end{cases}$$



- **Etnyre-Ghrist:**  
 $\{\text{camps de Beltrami no singulars}\} \Leftrightarrow \{\text{camps de Reeb reparametrizats}\}$
- Con **Cardona i Peralta-Salas** hem trobat extensions d'aquestes construccions a varietats amb vora com **estructures de contacte singulars**.
- **CMPP:** La correspondència Beltrami/Reeb funciona en dimensió superior.



- òrbites periòdiques per camps de Reeb (conjectura de Weinstein)  $\rightsquigarrow$  òrbites periòdiques per camps de Beltrami
- h-principi  $\rightsquigarrow$  embeddings de Reeb  $\rightsquigarrow$  universalitat de fluxos d'Euler (Cardona-M-Peralta-Presas)
- Suspensió de Reeb d'un difeomorfisme del disc  $\rightsquigarrow$  Construcció d'una màquina de Turing universal en 3D (Cardona-M-Peralta-Salas-Presas)

# La nostra solució geomètrica al problema de Tao

(Tao) Es pot trobar un embedding d'un camp incompressible com un flux d'Euler en dimensió superior?

Quan el camp d'Euler és Beltrami podem usar el nostre **mirall màgic**



**camp de Beltrami**

**camp de Reeb**

(CMPP) Podem realitzar un camp vectorial a una varietat  $N$  com camp de Reeb a una varietat de dimensió superior?

- **Condició necessària:**  $X$  geodesible a  $N$ .

Un **camp és geodesible** si existeix una mètrica Riemanniana  $g$  a  $M$  tal que les òrbites del camp  $X$  són geodèsiques de longitud 1.  $\rightsquigarrow$  existeix una 1-forma  $\alpha$  tal que  $\alpha(Y) = 1$  i  $\iota_Y d\alpha = 0$ .

- **Pregunta 1:** És **suficient** aquesta condició?
- **Pregunta 2:** Si un camp no és geodesible podem trobar un embedding com a camp geodesible en una varietat de dimensió més gran?

Responem a la pregunta 2.

## Lemma

*La suspensió d'un camp  $X(p, t)$  periòdic en  $t$  és geodesible.*

Considerem la suspensió  $N \times S^1$

$$Y(p, \theta) = (X(p, \theta), \frac{\partial}{\partial \theta}).$$

És geodesible (Prenem  $\alpha = d\theta$ . Compleix  $\iota_Y \alpha = 1$  i  $\iota_Y d\alpha = 0$ .)

# Variació de les tàctiques: Flexibilitat

Per respondre la pregunta 1 necessitem:

**Inspiració:** Totes les varietats de dimensió 3 són varietats de contacte. En dimensió superior:

## Theorem (Borman-Eliashberg-Murphy)

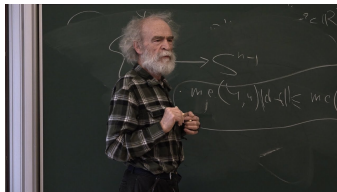
*Tota varietat de casi contacte compacta és de contacte.*

La condició de casi contacte és una condició formal i el h-principi de Gromov és un element clau de la demostració.



Filosofia de l'h-principi:

- **Objectiu:** Resoldre una equació (EDP, relació diferencial parcial...).
- **Semi-objectiu:** Resoldre una equació linealitzada/formal.
- **Miracle:** Demostrar que existeix una homotopia que permet deformar una solució formal en una solució autèntica. Per això necessitem sort (que el sistema tingui codimensió suficientment alta).





# Aplicació de l'h-principi: Universalitat

## Teorema 1 (Cardona, M., Peralta-Salas & Presas)

Els camps d'Euler són universals. La dimensió de l'espai ambient  $\mathbb{S}^n$  o  $\mathbb{R}^n$  és el **menor enter senar**  $n \in \{3 \dim N + 5, 3 \dim N + 6\}$ .

En el cas periòdic en  $t$ , el camp que l'estén  $u$  és una solució estacionària d'Euler amb mètrica  $g = g_0 + g_P$ , on  $g_0$  és la mètrica canònica a  $\mathbb{S}^n$  i  $g_P$  té suport a una bola que conté la varietat invariant  $e(N \times \mathbb{S}^1)$ .

## Idea de la construcció:

Usar la suspensió com a camp geodesible i després usar el mirall màgic. Ara el problema es converteix en estudiar la universalitat de camps de Reeb.

Ho demostrem usant un **h-principi** adaptat al problema.



# Parlem de màquines de Turing...

## Completitud de Turing

Un camp vectorial a  $M$  és Turing complet si pot simular qualsevol màquina de Turing  $\iff$  la parada de qualsevol màquina de Turing amb un determinat input és equivalent a que una trajectòria determinada del camp entri en un cert obert de  $M$ .

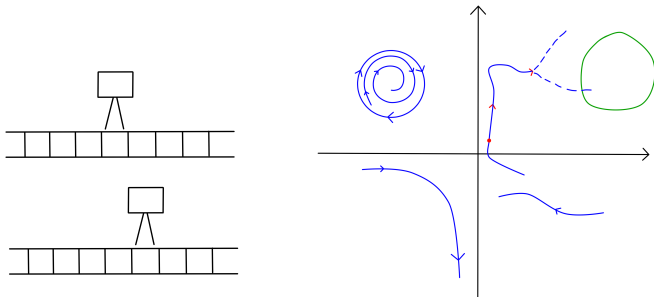
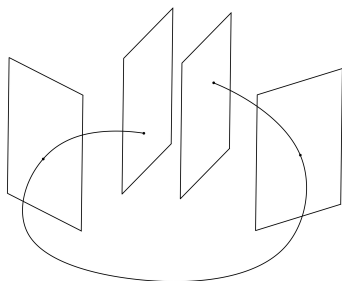


Figure: Màquina de Turing i camp Turing complet associat a un punt i un obert

## Teorema 2 (Cardona, M., Peralta-Salas, Presas)

Existeix un camp de Turing complet Euleritzable a  $\mathbb{S}^{17}$ . És un camp de Beltrami amb factor de proporcionalitat constant.



**Idea de la demostració:** Existeix un **difeomorfisme**  $\phi$  de  $\mathbb{T}^4$  que codifica una màquina de Turing universal (Tao) i el **principi h** donat per aproximació holonòmica és algorísmica.

# Podem millorar-ho?

## Teorema 3 (Cardona, M., P-S & Presas)

Existeix un camp Euleritzable  $X$  a  $\mathbb{S}^3$  que és Turing complet. La mètrica  $g$  tal que  $X$  és una solució estacionària de les equacions d'Euler és la mètrica canònica fora d'un tor sòlid.

Turing, 1936: El problema de la parada és **indecidible**.



## Corol·lari

**Existeixen trajectòries de fluids indecidibles:** No existeix cap algorisme que pugui decidir si una trajectòria entrarà a un obert o no en temps finit.

# Ens serveix això per resoldre el problema de blow-up de Navier Stokes?

Respuesta curta: No

Respuesta llarga: Equacions de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_u u - \nu \Delta u = -\nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u(t=0) = u_0, \end{cases} \quad (1)$$

$\nu > 0$  = viscositat.

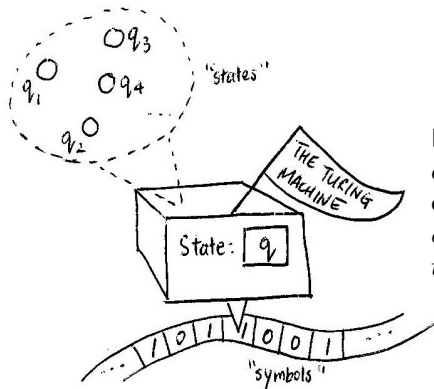
- $\Delta$  és el Laplacà de Hodge definit com  $\Delta u := (\Delta u^b)^\sharp$ .
- $X$  es un **camp de Beltrami** (amb factor 1). Dada inicial de NS  $\rightsquigarrow$

$$X(t) = X e^{-\nu t}$$

$\implies$  **existeix per tots els valors del temps.**

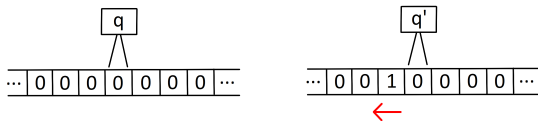
## Màquina de Turing

Una màquina de Turing ve donada per  $T = (Q, q_0, q_{halt}, \Sigma, \delta)$ , on  $Q$  és un conjunt finit d'estats amb un estat inicial  $q_0$  i un estat de parada  $q_{halt}$ ,  $\Sigma$  és l'alfabet, i  $\delta : (Q \times \Sigma) \rightarrow (Q \times \Sigma \times \{-1, 0, 1\})$  és la funció de transició. L'input d'una màquina de Turing és l'estat  $q \in Q$  i la cinta  $t = (t_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$  actuals.



**Manual d'instruccions:** Si l'estat actual és  $q_{halt}$  aleshores **es para l'algorisme** i retorna  $t$  com output. **Pels altres estats**  $\delta(q, t_0) = (q', t'_0, \varepsilon)$ , canviem  $q$  per  $q'$ ,  $t_0$  per  $t'_0$  i  $t$  per la cinta desplaçada per  $\varepsilon$ .

# Exemple



**Exemple:**  $\delta(q, 0) = (q', 1, +1)$ , canviem 0 per 1, el nou estat és  $q'$  i movem la cinta a l'esquerra.

Un vídeo:

# Exemple

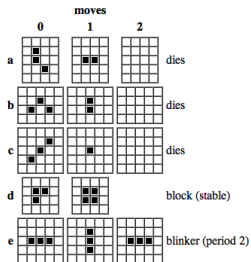
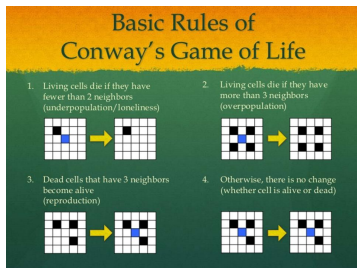


Figure: **John von Neumann**: Tota màquina de Turing té un autòmata celular que el simula.

El joc de Conway en acció:



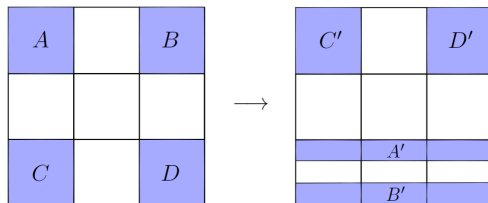
# Conjunt de Cantor

# Sistemes dinàmics simulant màquines de Turing

Un camp vectorial  $X$  és Turing complet si donada una màquina de Turing  $T$

Existeix un punt explícit  $p$  i un obert explícit  $U$  tal que la trajectòria de  $X$  que comença a  $p$  interseca  $U$  si i només si  $T$  es para amb l'entrada  $(q_0, t)$ .

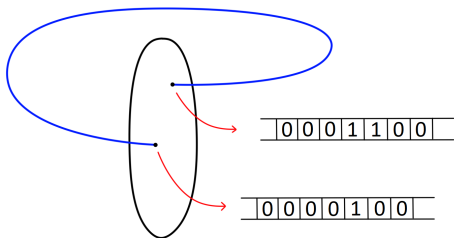
- **Moore** va generalitzar la noció de shift de sistemes dinàmics per **simular qualsevol màquina de Turing** (shifts generalitzats). Són conjugats a aplicacions del quadrat de Cantor  $C \times C$ .
- Demostrem que aquestes aplicacions del quadrat de Cantor es poden estendre a un difeomorfisme del disc que preserva àrea  $\varphi : D \rightarrow D$  i que és la identitat a  $\partial D$ .



# El mirall màgic contraataca...

## Teorema (Cardona, M., Peralta-Salas & Presas)

Aquest difeomorfisme (Turing complet) del disc es pot realitzar com el flux a temps 1 d'un camp de Reeb.



La forma de contacte  $\alpha$  es pot fixar al complementari del tor sòlid. Usant de nou el mirall màgic Reeb-Beltrami això prova el **Teorema 3**.

# Més coses...

- El cas dependent de temps: Demostrem (Cardona-M.-Peralta-Salas) que existeix una varietat tal que les equacions de Euler son Turing completes (la varietat es  $SO(N) \times \mathbb{T}^{N+1}$  amb  $\dim(M) \lesssim 10^{35}$ ).
- Tenim una construcció Euclídea en dimensió 3 no compacta(Cardona-M.-Peralta-Salas).
- **Complexitat lògica/ dinàmica/ computacional.** (treball en curs amb Bruera, Cardona i Peralta-Salas).

# Preguntes?

However, on the second time round, she came upon a low curtain she had not noticed before, and behind it was a little door about fifteen inches high: she tried the little golden key in the lock, and to her great delight it fitted!  
Lewis Carrol, Alice in Wonderland

