MESURES DE PODER EN VOTACIONS

Mikel Álvarez Mozos

Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Institut de Recerca

BEAT Barcelona Economic Analysis Team

Introducció

Què entenem per poder?

Capacitat de influir amb el vot la decisió final que s'adopta

Un parlament amb 101 escons

Partit	Escons
Vermell	50
Blau	50
Verd	1

Partit	Escons
Vermell	51
Blau	49
Verd	1

La quantitat d'escons no és una bona mesura de poder!

La Comunitat Econòmica Europea de 1958

Estat	Vots
Alemanya	4
Franca	4
Itàlia	4
Bèlgica	2
Holanda	2
Luxenburg	1

Per prendre una decisió calien 12 vots a favor.

El Consell de la Unió Europea

Des de l'entrada en vigor del tractat de Lisboa, per aprovar una resolució cal que es compleixin les següents condicions:

- Que votin a favor un mínim del 55% dels estats membres
- Que la població d'aquests sigui almenys el 65% de la població total

Què és un joc?

Un joc és una situació de presa de decisions multi-personal

1944 *Theory of Games and Economic Behavior*
John von Neumann i Oskar Morgenstern

Jocs no cooperatius

- Actors: individus (partits, governs, empresses, . . .)
- Models rics
- Descriptiu: estratègies, equilibris

Jocs cooperatius

- Actors: coalicions
- Models més abstractes
- Normatiu: repartiment

Representació d'un joc cooperatiu

La forma de funció característica

- Què faran els agents de la coalició complementaria?
- Pagaments factibles per a cada coalició
- Utilitat transferible

Extensions

- Jocs amb externalitats
- Jocs amb cooperació restringida

Com repartim?

$N :=$ conjunt de jugadors

$2^N :=$ parts d'N o conjunt de coalicions

$v : 2^N \to \mathbb{R}$ tal que $v(\emptyset) = 0$ és una funció característica

$\mathcal{G}^N :=$ conjunt de funcions característiques

Suposem que s'acaba formant la gran coalició

Com repartim $v(N)$?

Cerquem regles, $f : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^N$ eficients, i.e.,

$$\sum_{i \in N} f_i(v) = v(N)$$

L'anàlisi axiomàtica (Shapley, 1953)

Diem que i és un jugador nul al joc v si la seva participació en qualsevol coalició és irrellevant, i.e., si

$$v(S \setminus \{i\}) = v(S), \forall S \in 2^N$$

f verifica la propietat del jugador nul si assigna 0 als jugadors nuls, i.e., si

$$i \text{ jugador nul a } v \Rightarrow f_i(v) = 0$$

L'anàlisi axiomàtica (Shapley, 1953)

Diem que $i, j \in N$ son jugadors simètrics al joc v si contribueixen el mateix a qualsevol coalició, i.e., si

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \forall S \in 2^{N \setminus \{i,j\}}$$

f verifica la propietat de simetria si assigna el mateix als jugadors simètrics, i.e., si

$$i, j \text{ simètrics a } v \Rightarrow f_i(v) = f_j(v)$$

L'anàlisi axiomàtica (Shapley, 1953)

f verifica la propietat de linealitat si és una funció lineal en el espai vectorial $\mathcal{G}^N$, i.e., si

- $f(\alpha v) = \alpha f(v)$
- $f(v + w) = f(v) + f(w)$

L'anàlisi axiomàtica (Shapley, 1953)

Teorema

Només hi ha una regla, anomenada valor de Shapley, que verifica les propietats d'eficiència, jugador nul, simetria i linealitat.

El valor de Shapley

$N! := \{\sigma : N \to \{1, \dots, |N|\} \text{ bijectiva}\}$
$P_i^\sigma(v) := \{j \in N : \sigma(j) < \sigma(i)\}$
El valor de Shapley assigna a cada jugador i de un joc v

$$\varphi_i(v) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\sigma \in N!} v\left(P_i^\sigma \cup \{i\}\right) - v\left(P_i^\sigma\right)$$

Jocs simples

Un joc simple, és una funció característica v que verifica:

- $v(S) \in \{0, 1\}$
- $v(S) \leq v(T)$ per a tot $S \subseteq T$
- $v(N) = 1$

També es pot descriure mitjançant la família de coalicions guanyadores, $\mathcal{W} = \{S : v(S) = 1\}$.

Índex de poder de Shapley-Shubik

S'obté en aplicar el valor de Shapley a un joc simple.

$\mathcal{S}_i := \{S \subseteq N \setminus \{i\} : S \notin \mathcal{W}, S \cup \{i\} \in \mathcal{W}\}$

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \frac{|S|!(|N| - |S| - 1)!}{|N|!}$$

Eficiència ✓
Simetria ✓
Propietat del jugador nul ✓
Linealitat ✗

Dubey (1975)

Definim els jocs màxim i mínim per:

$$(v \vee w)(S) = \max\{v(S), w(S)\}$$
$$(v \wedge w)(S) = \min\{v(S), w(S)\}$$

f verifica la propietat de transferència si

$$f(v) + f(w) = f(v \vee w) + f(v \wedge w)$$

Teorema

L'índex de Shapley-Shubik és l'únic que verifica les propietats d'eficiència, jugador nul, simetria i transferència.

La regla de la pluralitat

El mecanisme d'investidura del Lehendakari al Parlament Basc:

- Cada grup parlamentari pot proposar un candidat a l'investidura
- Cal votar per un dels candidats o sinó abstenir-se
- En segona votació, el candidat amb més vots és investit Lehendakari

Jocs amb externalitats coalicionals

$\Pi(N) :=$ conjunt de particions d'N

(S, P), on $S \in 2^N$ i $P \in \Pi(N \setminus S)$ és una coalició incrustada

$\mathcal{EC}^N :=$ conjunt de coalicions incrustades d'N

$v : \mathcal{EC}^N \to \mathbb{R}$, on $v(\emptyset, P) = 0, \forall P \in \Pi(N)$ és una funció de particions

$\mathcal{GE}^N :=$ conjunt de funcions de particions

Suposem que s'acaba formant la gran coalició

Com repartim $v(N, \emptyset)$?

Cerquem regles, $f : \mathcal{GE}^N \to \mathbb{R}^N$ eficients, i.e.,

$$\sum_{i \in N} f_i(v) = v(N, \emptyset)$$

Generalitzant els axiomes de Shapley

Linealitat

El joc permutat σv es defineix per $\sigma v(S, P) = v(\sigma S, \sigma P)$.
f verifica la propietat d'anonimat si $\sigma(f(v)) = f(\sigma v)$.

Diem que i és un jugador nul

tipus I si $\forall (S; P) \in \mathcal{EC}^N$ on $i \in S$,

$$v(S; P) = v(S \setminus \{i\}; P \cup \{\{i\}\}).$$

tipus II si $\forall (S; P) \in \mathcal{EC}^N$ on $i \in S$ i $\forall T \in P \cup \{\emptyset\}$,

$$v(S; P) = v(S \setminus \{i\}; (P \setminus \{T\}) \cup \{T \cup \{i\}\}).$$

tipus III si ho és quan v no té externalitats

Generalitzacions del valor de Shapley

Teorema (de Clippel i Serrano, 2008)

Només hi ha una regla que verifica les propietats d'eficiència, linealitat, anonimat i la propietat del jugador nul tipus I. S'obté en aplicar el valor de Shapley a la funció característica $v^*(S) = v(S; \{\{j\}_{j \in N \setminus S}\})$.

Teorema (Skibski et al., 2018)

Hi ha una família de regles que verifiquen les propietats d'eficiència, linealitat, anonimat i la propietat del jugador nul tipus II.

Teorema (Alonso-Meijide et al., 2019)

Hi ha una família de regles que verifiquen les propietats d'eficiència, linealitat, anonimat i la propietat del jugador nul tipus III.

Jocs simples amb externalitats

Definim la relació d'inclusió entre coalicions incrustades, $(S, P) \sqsubseteq (T, Q)$, quan es compleixen dues condicions

- $S \subseteq T$
- $\forall T' \in Q, \exists S' \in P : T' \subseteq S'$

Un joc simple amb externalitats, és una funció de particions v que verifica:

- $v(S, P) \in \{0, 1\}$
- $v(S, P) \leq v(T, Q)$, per a tot $(S, P) \sqsubseteq (T, Q)$
- $v(N, \emptyset) = 1$

L'índex de Shapley-Shubik amb externalitats

Sigui $\mathcal{M}$ el conjunt minimal respecte a la relació d'inclusió de coalicions incrustades guanyadores.

Diem que i és un jugador nul si $\forall (S, P) \in \mathcal{M}$, $i \notin S$.

Teorema (Alonso-Meijide et al., 2017)

Només hi ha un índex de poder (per a jocs simples amb externalitats) que verifica les propietats d'eficiència, transferència, anonimat i la propietat del jugador nul. S'obté en aplicar el valor de Shapley a la funció característica $v^*(S) = v(S; \{\{j\}_{j \in N \setminus S}\})$.

Jocs amb cooperació restringida

Podem construir models que s'acostin més a la realitat afegint-hi:

- Un graf que descriu els canals de comunicació entre els jugadors.
- Un graf que descriu les incompatibilitats.
- Una partició de jugadors afins.
- Una seqüencia de particions.

  $\vdots$

Gràcies!

Més al web `http://bit.ly/AlvarezMozos`