

Valors extrems en Sistemes Complexos

Isabel Serra
Centre de Recerca Matemàtica

13 de març de 2021



Valors Extremes



Teoria de valors extrems

Més enllà de la mitjana i les seves propietats asimptòtiques....

Fisher-Tippett Theorem (1928)

Sigui $(X_1 \dots X_n)$ v.a.i.i.d i $M_n = \max\{X_1 \dots X_n\}$. La distribució asimptòtica de M_n és la **generalitzada de valors extrems**.



Distribució de la cua

Si $S(x)$ i $f(x)$ són la cdf i pdf d'una v.a. no-negativa X , aleshores la cdf i la pdf dels excessos de X a $u > 0$, denotem per

$$X_u = (X - u | X > u)$$

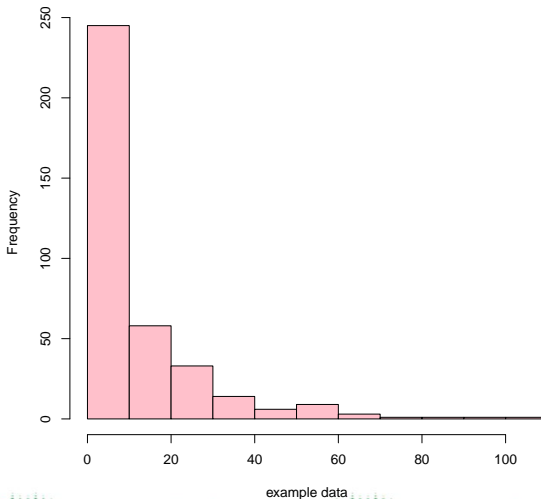
corresponen a

$$f_u(x) = f(x + u) / S(u)$$

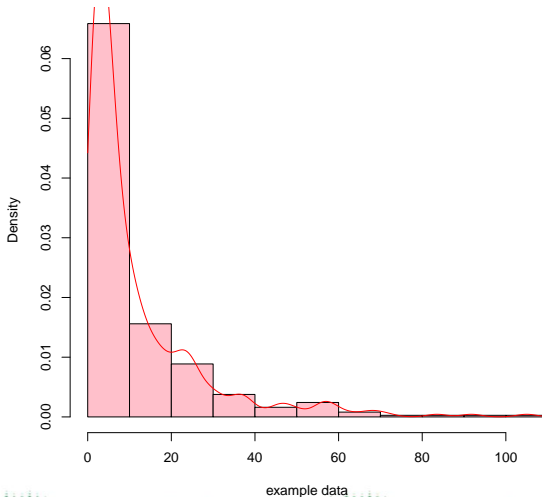
$$S_u(x) = S(x + u) / S(u)$$



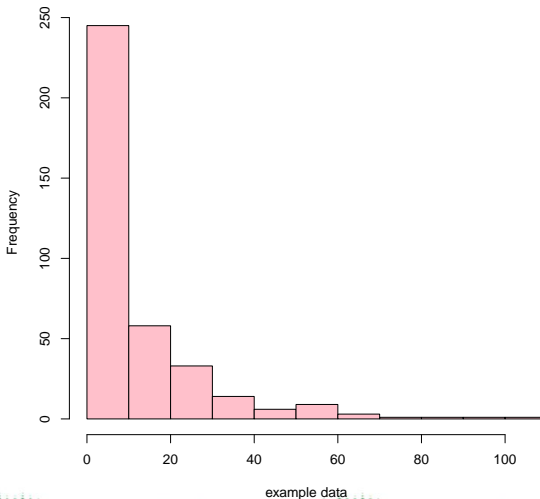
Distribució de la cua



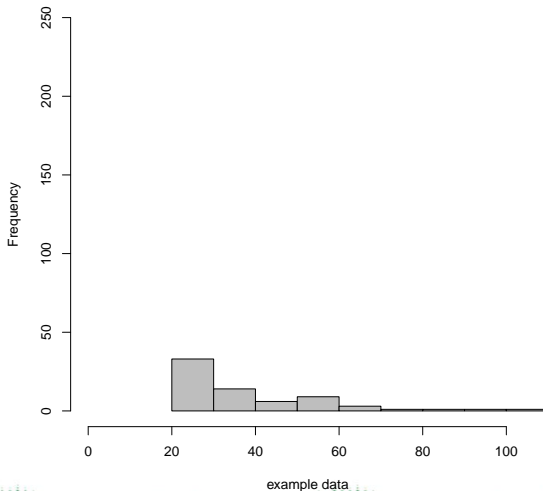
Distribució de la cua



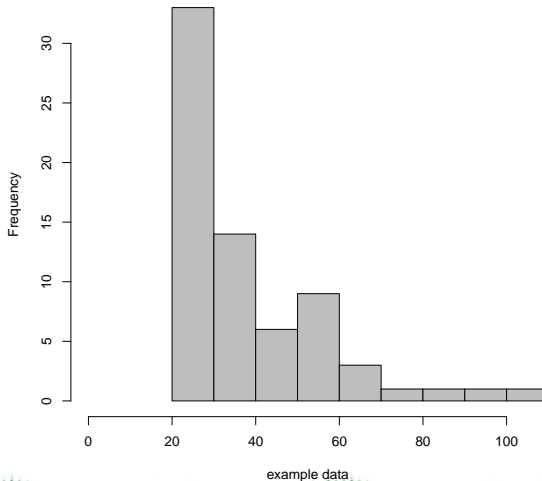
Distribució de la cua



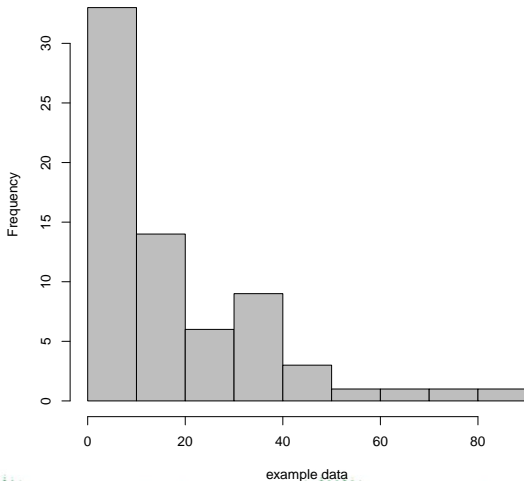
Distribució de la cua



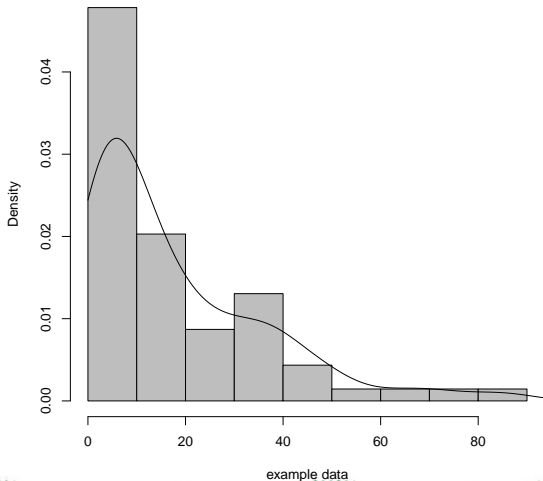
Distribució de la cua



Distribució de la cua



Distribució de la cua



Teoria de valors extrems

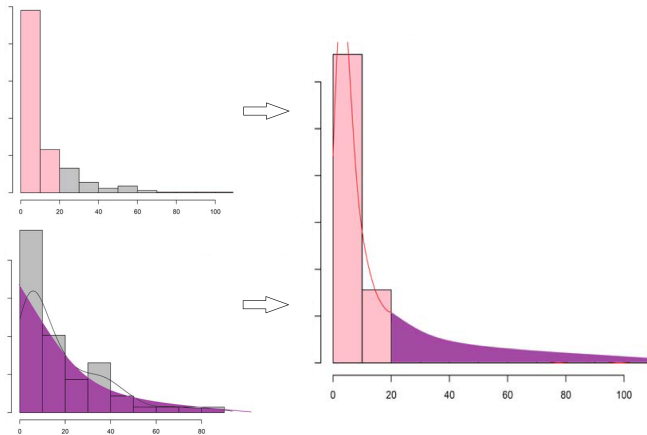
Pickands–Balkema–de Haan

Sigui F la cdf d'una v.a. aleshores

$$F_u(y) \rightarrow GPD(\xi, \psi)(y), \quad u \rightarrow \infty$$

on GPD és la **distribució generalitzada de Pareto**.

PoT: Pics més enllà d'un lliardar

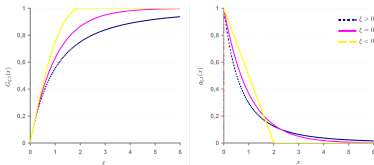


Distribució generalitzada de Pareto

La cdf de la GPD està definida per $\psi > 0$ i $\xi \in \mathbb{R}$ com

$$\begin{aligned} G(x; \xi, \psi) &= 1 - (1 + \xi x/\psi)^{-1/\xi}, & \text{si } \xi \neq 0 \\ &= 1 - \exp(-x/\psi), & \text{si } \xi = 0, \end{aligned}$$

amb x a $[0, \infty)$ per $\xi \geq 0$ i $(0, -\psi/\xi)$ per $\xi < 0$.



Distribució generalitzada de Pareto

- El coeficient de variació és $cv = 1/(1 - 2\xi)$
- El r -èssim moment existeix si $\xi < 1/r$
- És un model tancat per truncament:
 $X \sim GPD(\xi, \psi) \Rightarrow X_u \sim GPD(\xi, \psi + \xi u)$.

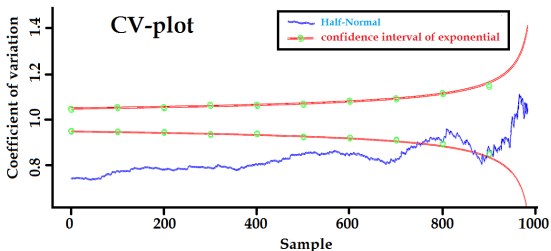
PowerLaw

Si $X \sim GPD(\xi, \psi)$ i $\xi > 0$, aleshores
 $1 + \xi X/\psi \sim PowerLaw_1(\xi)$ amb cdf donada per

$$S(y) = y^{-1/\xi}, \quad x \geq 1$$

CV-plot

Siugi $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ mostra ordenada, el cv-plot és $\{ (i, cv(x_{(j)} - x_{(i)} | j > i)) \}_{i=1, \dots, n}$.



El CV-plot d'una GPD és constant!

Sistemes Complexos



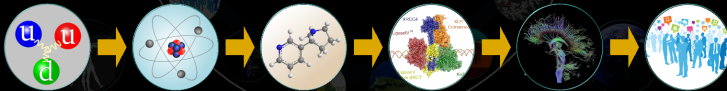
Intentant esbrinar què són!

- Imaginem un objecte amb parts relacionades.
- Un sistema és un objecte que té parts i cada part està relacionada amb almenys alguna altra part de l'objecte.
- Un sistema és complex si per descriure'l com objecte ens cal descriure cada part i les relacions entre les parts.
- Si és suficient descriure les parts per descriure l'objecte, aleshores com a molt és un sistema complicat, però no un sistema complex.

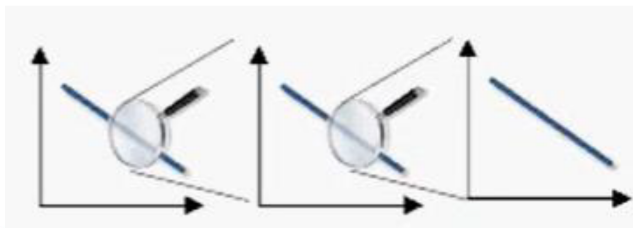
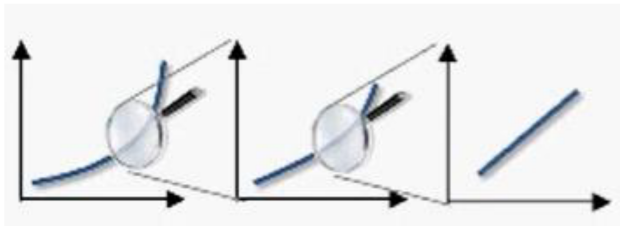
Idea

« The behavior of large and complex aggregates of elementary particles, it turns out, is not to be understood in terms of a simple extrapolation of the properties of a few particles. Instead, at each level of complexity entirely new properties appear and the understanding of the new behaviours requires research which I think is as fundamental in its nature as any other. »

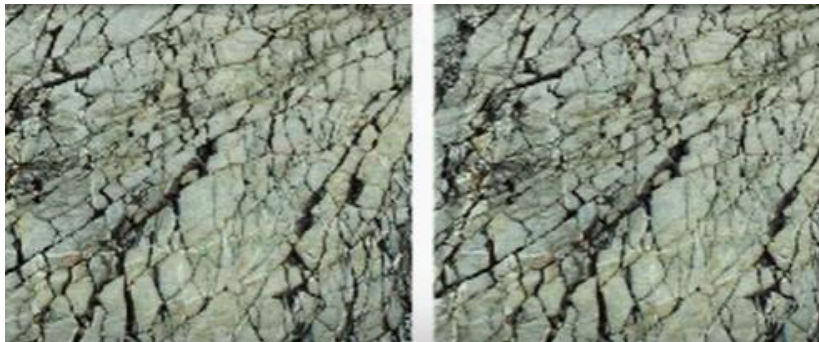
Phil W. Anderson, *More is Different*, Science (1972)



Escales característiques

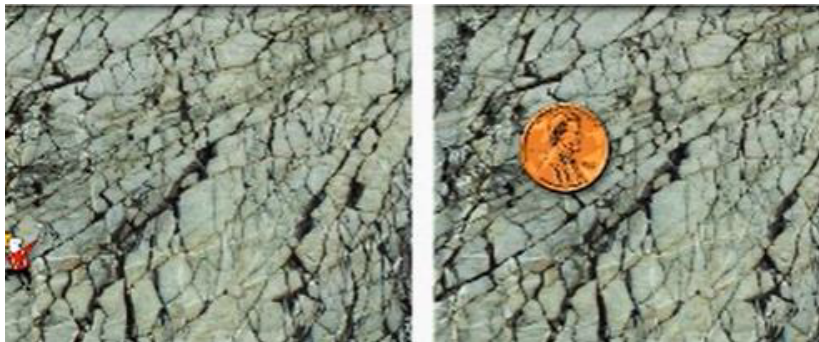


Lliure d'escala



Et semblen iguals?

Lliure d'escala



Doncs, no!

Llei de Gutenberg-Richter

La mida d'un terratrèmol es mesura tant amb

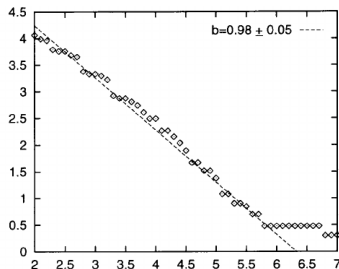
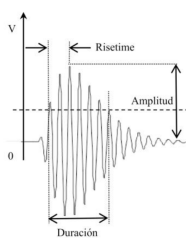
- m : la magnitud
- M : el moment sísmic

La relació entre ambdues mesures és:

$$m = \frac{2}{3}(\log_{10} M - 9.1)$$

La llei de GR estableix que la M es distribueix segons una power-law.

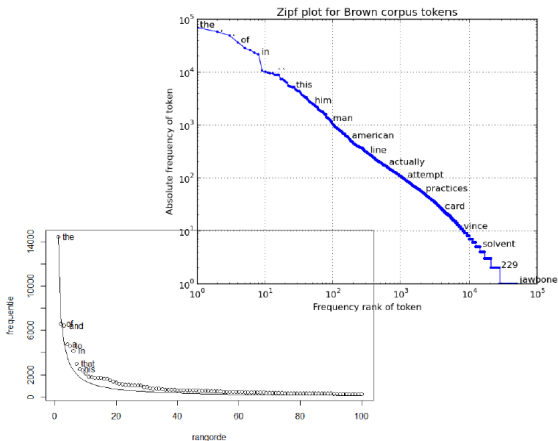
Power-law



$$n(M) \propto \frac{1}{M^{1+\beta}}$$

La power-law és la única llei probabilista (univariant) que compleix la propietat de lliure d'escala.

Sistemes complexos



Un exemple per pensar



Esdeveniment de Carrington

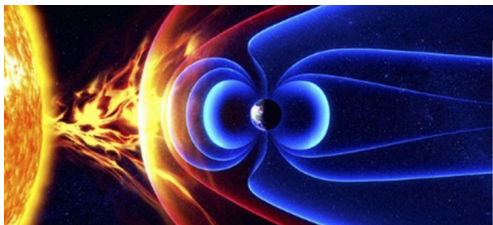
Richard C. Carrington va ser un astrònom aficionat anglès que, l'1 de setembre de 1859, va fer l'observació d'una gran flamarada solar, que va produir una tempesta geomagnètica gegant.

Era prou potent per interrompre les comunicacions telegràfiques, xocar els operadors de telègrafs i fins i tot encendre paper telègraf a causa de les descàrregues de les línies telegràfiques.



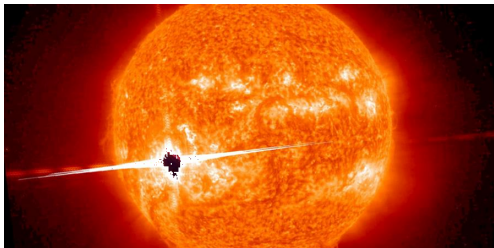
Una tempesta geomagnètica

És una pertorbació de la magnetosfera terrestre causada per una ona de xoc de vent solar, generalment causada per una explosió de massa coronal (CME).



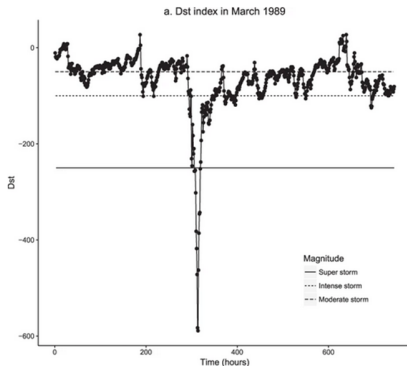
Avui dia

Una tempesta geomagnètica semblant a Carrington seria catastròfica per als sistemes elèctrics i les comunicacions.



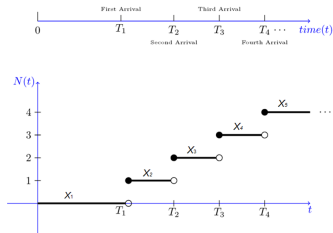
L'índex DST

Registrat cada hora pel: World Data Center for Geomagnetism de Kyoto.



Un procés d'arribada

És una seqüència T_n de v.a. no negatives i creixents, anomenats temps d'ocurrència.

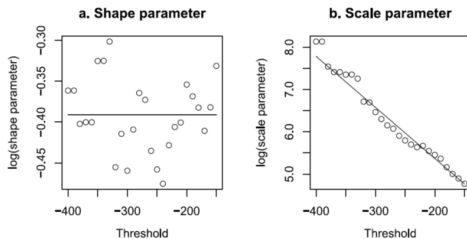


Els temps entre ocurrències es defineixen com,
 $X_1 = T_1$ i $X_i = T_i - T_{i-1}$ per a $i > 1$.

Donat un llindar per DST

El temps entre ocurrencies com un procés de renovació de Weibull (MSCP, 2019).

$$S(t) = P(X > t) = \exp(-t/\tau)^\gamma$$



Fent variar el llinard

Els temps entre ocurrencies modelat per regressió de Weibull amb escala variant amb el llinard de la tempesta, T , segons

$$\log(\tau) = \beta_0 + \beta_1 T$$

i el paràmetre de forma és constant.

Fins ara, s'havia vist, el temps d'ocurrencies com un procés de Poisson homogeni (Rieley, 2012).



SCIENTIFIC REPORTS

OPEN Probability estimation of a Carrington-like geomagnetic storm

David Morfiña^{1,2,3}, Isabel Serra^{1,2,4,5}, Pedro Puig^{1,2} & Álvaro Corral^{1,2,4,6}

S'obté una probabilitat al voltant de 1% de tenir un esdeveniment Carrington o més intens durant la propera dècada:

$$P(X \leq t_c + t_d | X \geq t_c) = \frac{S(t_c, -850) - S(t_c + t_d, -850)}{S(t_c, -850)}$$

Moltes gràcies per la vostra atenció!

