SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES

Obertura del Curs 2020/2021

Multiplicar i dividir vectors (i altres ardides aventures)

S. Xambó

UPC/BSC

30/11/2020

Índex

☐[**1984**] M. J. Crowe: *A history of vector analysis. The evolution of the idea of vectorial system*. Dover Publications. Reproducció, amb petites correccions del volum del mateix títol publicat per University of Notre Dame, 1967.

https://web.mat.upc.edu/sebastia.xambo/GA/s-scm.pdf

N

Virtuts que brollen d'un voler

...

i el misteri de la seva fertilitat

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

- $\sqrt[n]{a}$ $(a \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N})$.

  Exponencials $a^{m/n}$, a^x $(a > 0,\ m, n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R})$.

  Anàlisi real.

- $z = a + bi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = re^{i\alpha}$.

  Arrels n-èsimes de z: $\sqrt[n]{r}e^{(\alpha+2k\pi)/n}$ $(k \in [n])$.

  Teorema fonamental de l'àlgebra.

  Anàlisi complexa.

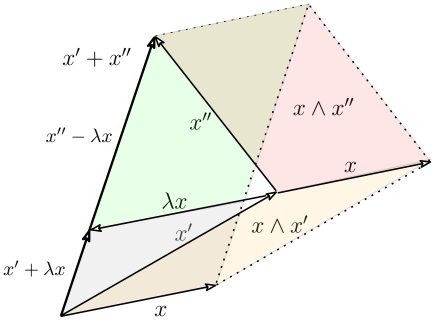
Voler multiplicar i dividir vectors, ens donaria entrada a un domini fecund?

N

El pla euclidià

Àrees. Angles i àrees

- E_2 pla euclidià. Si $x, x' \in E_2$, $x \cdot x' \in \mathbb{R}$ (*producte escalar*, o *interior*).
- $x \wedge x'$ *àrea orientada* definida per x i x' (*producte exterior*).
- $x \wedge x = 0$ i $x' \wedge x = -x' \wedge x$.



El producte exterior és *bilineal*

$x, x', x'' \in E_2$

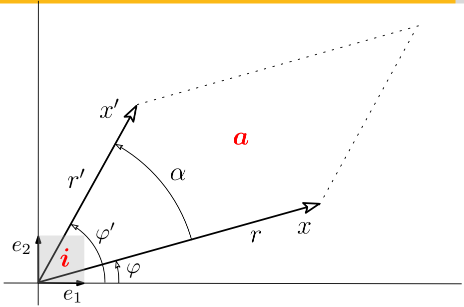
Ls figura mostra que

$$x \wedge x' = x \wedge (x' + \lambda x)$$
$$x \wedge x'' = x \wedge (x'' - \lambda x)$$
$$\begin{aligned} x \wedge (x' + x'') &= x \wedge (x' + \lambda x) + x \wedge (x'' - \lambda x) \\ &= x \wedge x' + x \wedge x'' \end{aligned}$$

- Si e_1, e_2 és una base, $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ i $x' = x'_1 e_1 + x'_2 e_2$,

  $x \wedge x' = (x_1 x'_2 - x_2 x'_1) e_{12}$, $e_{12} = e_1 \wedge e_2$.

N



$x, x' \in E_2$
$r = |x|,\ r' = |x'|$
e_1, e_2 base ortonormal
$x = x_1e_1 + x_2e_2,\ x' = x'_1e_1 + x'_2e_2$
$\alpha = \angle(x, x') = \varphi' - \varphi$

$\boldsymbol{a} = x \wedge x'$ àrea orientada
$\boldsymbol{i} = e_1 \wedge e_2 = e_{12}$ unitat àrea
$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{i}$

- Producte escalar (o *interior*): $x \cdot x' = rr' \cos\alpha$

  ▷ $$x \cdot x' = rr'(e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi) \cdot (e_1 \cos\varphi' + e_2 \sin\varphi') = rr'(\cos\varphi \sin\varphi' + \sin\varphi \cos\varphi') = rr' \cos(\varphi' - \varphi) = rr' \cos\alpha.$$

- Producte *exterior*: $x \wedge x' = \boldsymbol{i} rr' \sin\alpha$

  ▷ $$\begin{aligned} x \wedge x' &= rr'(e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi) \wedge (e_1 \cos\varphi' + e_2 \sin\varphi') \\ &= rr'(\cos\varphi \sin\varphi' - \sin\varphi \cos\varphi')e_{12} \\ &= \boldsymbol{i} rr' \sin(\varphi' - \varphi) = \boldsymbol{i} rr' \sin\alpha. \end{aligned}$$

N

- $|x \cdot x'|$ màxim quan $x' \sim x$, mínim quan $x \perp x'$.
- $|x \wedge x'|$ màxim quan $x' \perp x$, mínim quan $x \sim x'$.
- Són productes complementaris ben compensats:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Podem definir un producte de vectors per la fórmula

$$xx' = x \cdot x' + x \wedge x' \ ?$$

Abans de seguir, un comentari emès el 1990 pel físic Edwin T. Jaynes (1922-1998), *Scattering of light by free electrons as a test of quantum theory* (p. 5/20), **The Electron: New Theory and Experiment** (editat per D. Hestenes i A. Weingartshofer), Kluwer Academic Publishers, 1991:

> *En aquesta equació, el símbol '+' ha de tenir un sentit diferent que en les matemàtiques convencionals. Però llavors el símbol '=' també ha de ternir un sentit diferent [...] de manera que em resulta incomprensible. El més proper que puc imaginar és que si bé no podem parlar de sumar pomes i taronges, podem nogensmenys col·locar una poma al costat d'una taronja i contemplar-les juntes, i potser és aquest el significat que se li confereix."*

N

Àlgebra de Wessel $\mathcal{G}_2$

Producte geomètric.
Nombres complexos: C versus $\mathbb{C}$.
Baricentre, circuncentre i ortocentre.
Determinació de l'ortocentre.
Simetries i rotacions.

Primer, eixamplar la base...

- $\Lambda^1 = E_2 = \langle e_1, e_2 \rangle$: *Vectors*, $x, x' \in \Lambda^1$.
- $\Lambda^0 = \mathbb{R} = \langle 1 \rangle$: *Escalars*, $x \cdot x' \in \Lambda^0$.
- $\Lambda^2 = \langle e_{12} \rangle = \langle \boldsymbol{i} \rangle$: *Bivectors*, $x \wedge x' \in \Lambda^2$.
- $\Lambda = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus \Lambda^2$: *Àlgebra exterior* de E_2.

Teorema (Clifford). Hi ha un únic *producte bilineal* **associatiu** $\Lambda \times \Lambda \to \Lambda$, amb unitat $1 \in \mathbb{R}$, tal que $xx' = x \cdot x' + x \wedge x'$ per a qualssevol $x, x' \in \Lambda^1$.

- $x^2 = r^2 \in \Lambda^0$ (*reducció*). $\triangleright$ $e_1^2 = e_2^2 = 1$.
- Si $x \neq 0$, $x^{-1} = x/r^2$ $\triangleright$ $u^{-1} = u$ si u és unitari.
- Si $x \cdot x' = 0$, $xx' = -x'x$, i recíprocament. $\triangleright$ $e_{21} = -e_{12}$.

1	e_1	e_2	e_{12}
e_1	1	e_{12}	e_2
e_2	$-e_{12}$	1	$-e_1$
e_{12}	$-e_2$	e_1	-1

Exemple

$(e_1 e_2)e_{12} = e_{12}e_{12} = -1$,
i $e_1(e_2 e_{12}) = e_1(-e_1) = -1$.

N

Producte interior. És l'única aplicació bilineal $\Lambda \times \Lambda \to \Lambda$, $(a, a') \mapsto a \cdot a'$, que compleix les propietats següents:

(1) coincideix amb el producte escalar si $a = x$ i $a' = x'$ són vectors;

(2) $a \cdot a' = 0$ si a o a' és un escalar;

(3) si $a = x$ és un vector i $a' = y \wedge y'$ un bivector,

$$x \cdot (y \wedge y') = (x \cdot y)y' - y(x \cdot y') = -(y \wedge y') \cdot x; \text{ i}$$

(4) si $a = x \wedge x'$ i $a' = y \wedge y'$ són bivectors,

$$a \cdot a' = x \cdot (x' \cdot a') = (a \cdot y) \cdot y'.$$

Teorema. $aa' = a \cdot a' + a \wedge a'$ *val per a qualssevol* $a, a' \in \Lambda$.

Basta mirar les taules següents del producte interior i exterior, i comparar amb la taula del producte geomètric.

$\cdot$	e_1	e_2	e_{12}
e_1	1	0	e_2
e_2	0	1	$-e_1$
e_{12}	$-e_2$	e_1	-1

$\wedge$	e_1	e_2	e_{12}
e_1	0	e_{12}	0
e_2	$-e_{12}$	0	0
e_{12}	0	0	0

	e_1	e_2	e_{12}
e_1	1	e_{12}	e_2
e_2	$-e_{12}$	1	$-e_1$
e_{12}	$-e_2$	e_1	-1

Remarca. Aquest teorema és particular del pla, però veurem que la fórmula és vàlida en general si a o a' són vectors.

- $\mathbf{C} = \Lambda^+ = \Lambda^0 \oplus \Lambda^2 = \langle 1, \boldsymbol{i} \rangle$ és una subàlgebra de Λ isomorfa a $\mathbb{C}$.

És la subàlgebra fixa per l'automorfisme $a \mapsto \hat{a}$ induït per $\Lambda^1 \to \Lambda^1$, $x \mapsto -x$ (*involució de paritat*). $\quad \triangleright\ \hat{\boldsymbol{i}} = (-e_1)(-e_2) = \boldsymbol{i}$.

- Si $x \in E_2$, $x\boldsymbol{i} \in E_2$ i $x \mapsto x\boldsymbol{i}$ és la rotació d'amplitud $\pi/2$.

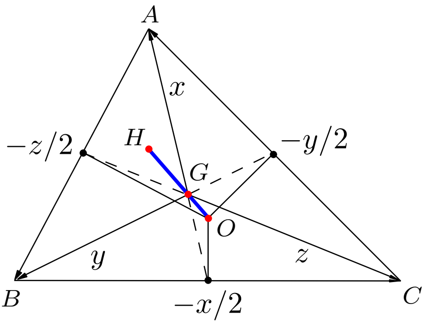
$$\triangleright\ e_1\boldsymbol{i} = e_1e_1e_2 = e_2,\ e_2\boldsymbol{i} = e_2e_1e_2 = -e_1e_2e_2 = -e_1.$$

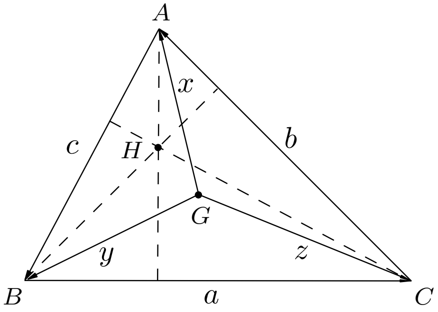
- $x \mapsto \boldsymbol{i}x = -x\boldsymbol{i}$ és la rotació d'amplitud $-\pi/2$

- $e^{\boldsymbol{i}\alpha} = \cos\alpha + \boldsymbol{i}\sin\alpha$ i per tant

$$x \mapsto xe^{\boldsymbol{i}\alpha} = e^{-\boldsymbol{i}\alpha}x \text{ és la rotació d'amplitud } \alpha.$$

- Hi ha un únic automorfisme *lineal* $a \mapsto \tilde{a}$ que inverteix l'ordre del producte exterior (*involució de reversió*). $\quad \triangleright\ \tilde{\boldsymbol{i}} = e_2e_1 = -\boldsymbol{i}$.
És un *antiautomorfisme* tant de $\wedge$ com del producte geomètric.
Restringit a **C** és la conjugació: si $z = a + b\boldsymbol{i}$, $\tilde{z} = a - b\boldsymbol{i} = \bar{z}$.





El punt G denota el *baricentre* de ABC, $G = (A + B + C)/3$; x, y and z són els vectors de posició dels vèrtexs A, B i C respecte del baricentre G, d'on $x + y + z = 0$. El vector del punt mitjà de BC és $(y + z)/2 = -x/2$. Per tant G és el punt comú a les tres medianes, i l'*homotècia de centre G i raó -2 transforma els punts mitjans dels costats en els corresponenets vèrtexs oposats*, *les mediatrius en les altures*, i *el circumcentre O en l'ortocentre H* (**recta d'Euler**). $\triangleright$ $a + b + c = 0$.

Teorema dels sinus. $a \wedge b = b \wedge c = c \wedge a$ $(= \boldsymbol{P} = P\boldsymbol{i})$.

Els punts de les altures de A, B, C tenen la forma, respectivament,

$$x + \lambda a\boldsymbol{i}, \quad y + \mu b\boldsymbol{i}, \quad z + \rho c\boldsymbol{i} \qquad (\lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R}).$$

La intersecció de les dues primeres altures es pot obtenir trobant λ i μ usant l'equació $x + \lambda a\boldsymbol{i} = y + \mu b\boldsymbol{i}$, o

$$\lambda a\boldsymbol{i} = c + \mu b\boldsymbol{i}.$$

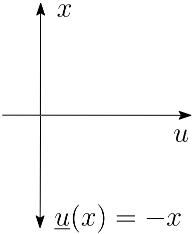
Multiplicant per b per l'esquerra tenim $\lambda ba\boldsymbol{i} = bc + \mu b^2\boldsymbol{i}$. La part escalar d'aquesta relació dóna $\lambda(b \wedge a)\boldsymbol{i} = b \cdot c$, és a dir, $\lambda\boldsymbol{i} = -(b \cdot c)\boldsymbol{P}^{-1}$. Per tant $H = x + a(\lambda\boldsymbol{i}) = x - a(b \cdot c)\boldsymbol{P}^{-1}$, especificat com a punt de l'altura d'A. Sumant aquesta relació amb les anàlogues per a B i C, trobem

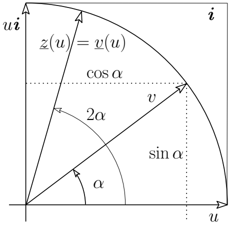
$$\begin{aligned} H &= -\tfrac{1}{3}(a(b \cdot c) + b(c \cdot a) + c(a \cdot b))\boldsymbol{P}^{-1} \\ &= \tfrac{1}{3P}(a(b \cdot c) + b(c \cdot a) + c(a \cdot b))\boldsymbol{i}. \end{aligned}$$

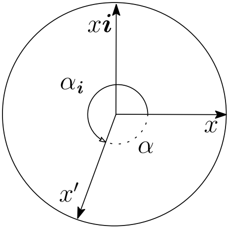
Pel teorema d'Euler, també queda determinat el circumcentre:

$$O = -\tfrac{1}{2}H.$$

- Simetria $\underline{u}$,
  $x \mapsto uxu^{-1}$.
- Rotació $\underline{v}\,\underline{u}$:
  $\underline{v}(\underline{u}(x))$
  $= vuxv^{-1}u^{-1}$
  $= zxz^{-1} = \underline{z}(x)$,
  on $z = vu$
- Angle $\boldsymbol{i}$-orientat.







■ Si u és un vector no nul, $\underline{u}(x) = uxu^{-1}$ és un vector per a tot vector x i *$\underline{u}$ és la simetria axial d'eix $\langle u \rangle$*.

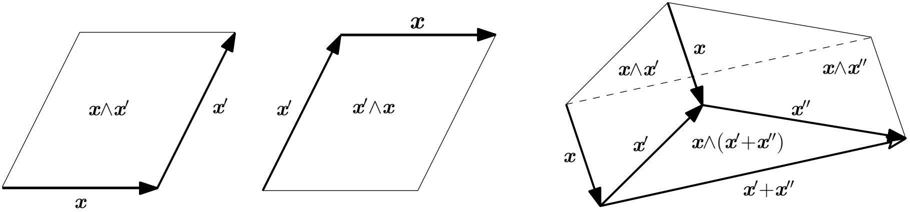
■ Si v és un altre vector no nul, i $\alpha = \angle(u, v)$, llavors *$\underline{vu} = \underline{v}\,\underline{u}$ és la rotació d'amplitud 2α*.

$v = ue^{\boldsymbol{i}\alpha}$, $z = vu = ue^{\boldsymbol{i}\alpha}u = e^{-\boldsymbol{i}\alpha}$, $\underline{z}(x) = zxz^{-1} = e^{-\boldsymbol{i}\alpha}xe^{\boldsymbol{i}\alpha} = xe^{2\boldsymbol{i}\alpha}$

□[**2019c**]

Àlgebra de Pauli $\mathcal{G}_3$

E_3 i $\Lambda = \Lambda E_3$. Producte interior i producte geomètric. Involucions, dualitat de Hodge i fórmules de Riesz.



- e_1, e_2, e_3 base ortonormal de E_3; $e_{ij} = e_i \wedge e_j$, $e_{ijk} = e_i \wedge e_j \wedge e_k$, $\mathbf{i} = e_{123}$
- $\Lambda = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus \Lambda^2 \oplus \Lambda^3$: àlgebra exterior.
- $\Lambda^0 = \langle 1 \rangle = \mathbb{R}$: *escalars*, grau 0;
- $\Lambda^1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle = E_3$: *vectors* (polars), grau 1;
- $\Lambda^2 = \langle e_{12}, e_{23}, e_{31} \rangle$: *bivectors* o *vectors axials*, grau 2;
- $\Lambda^3 = \langle \mathbf{i} \rangle$: *trivectors*, *volums* o *pseudoescalars*, grau 3.

Una *k-brana* és un producte exterior no nul de k vectors. Així,
$1, 2, 3$-brana = vector no nul, àrea no nul·la, volum no nul.

El producte *interior* $\Lambda \times \Lambda \to \Lambda$, $(a, a') \mapsto a \cdot a'$, és l'única aplicació bilineal que compleix (1)-(4):

(1) $a \cdot a' = 0$ si $a \in \Lambda^0$ o $a' \in \Lambda^0$.

Altrament, podem suposar que $a \in \Lambda^k$ i $a' \in \Lambda^{k'}$ $(k, k' \geqslant 1)$.

(2) Si $k = 1$, de manera que $a = x \in \Lambda^1$, $x \cdot a' = i_x(a') = x \lrcorner a'$
(la contracció interior usual, que antideriva $\wedge$);

(3) $a \cdot a' = (-1)^{kk'+k'} a' \cdot a$ si $k' \leqslant k$;

(4) Si $1 < k \leqslant k'$ i $a = b \wedge x$ (x vector), $(b \wedge x) \cdot a' = b \cdot (x \cdot a')$.

- Si a és una k-brana i a' una k'-brana, $k \leqslant k'$, llavors
  $a \cdot a' = 0$ *si un dels factors de a és ortogonal a tots els factors de a'*.

Teorema (Clifford). Hi ha un únic *producte bilineal* **associatiu** $\Lambda \times \Lambda \to \Lambda$, amb unitat $1 \in \mathbb{R}$, tal que $xa = x \cdot a + x \wedge a$ per qualssevol $x \in \Lambda^1$, $a \in \Lambda$. A més es compleix $ax = a \cdot x + a \wedge x$.

L'estructura $\mathcal{G} = \mathcal{G}_3$ formada per Λ amb el producte geomètric és l'*àlgebra geomètrica* de E_3. També es coneix, especialment en llibres de física, com *àlgebra de Pauli* (Pauli la va redescubrir en elaborar la seva teoria de l'espín quàntic (1927) com l'àlgebra $\mathbb{C}(2)$: *matrius de Pauli*).

Involucions. Les involucions $a \mapsto \hat{a}$ i $a \mapsto \tilde{a}$ es defineixen com per E_2.
$\triangleright$ $\widehat{e}_{23} = (-e_2)(-e_3) = e_{23}$ i $\widetilde{e}_{23} = e_3 e_2 = -e_{23}$. En canvi, $\hat{\mathbf{i}} = \widetilde{\mathbf{i}} = -\mathbf{i}$.

En general, si $a \in \mathcal{G}^k$, $\hat{a} = (-1)^k a$ i $\tilde{a} = (-1)^{k/\!\!/2} a$.

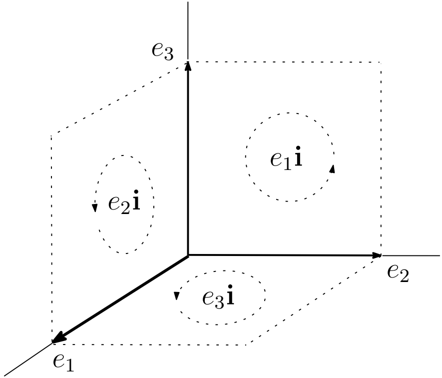
- $\mathbf{i}^2 = -1$, d'on $\langle 1, \mathbf{i} \rangle \simeq \mathbf{C}$. $\triangleright$ $\mathbf{i} = -e_{321}$ i $e_{321} e_{123} = 1$).

- Per a tot $x \in \mathcal{G}^1$, $x\mathbf{i} = \mathbf{i}x \in \mathcal{G}^2$ (*dual de Hodge*) i $\mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^2$, $x \mapsto x\mathbf{i}$, és un isomorfisme lineal. L'invers $\mathcal{G}^2 \to \mathcal{G}^1$ ve donat per $a \mapsto -a\mathbf{i}$.

- $(x \times x')\mathbf{i} = x \wedge x'$ $\triangleright$ $(x \times x')\mathbf{i} = (-x \times x')(-\mathbf{i})$: $x \times x'$ es un *vector axial*.

- $x\mathbf{i}\widetilde{x\mathbf{i}} = x\mathbf{i}(-\mathbf{i}x) = x^2$. Aquesta relació significa que la dualitat de Hodge és una **isometria** de la mètrica de $E_3 = \mathcal{G}^1$ amb la que indueix a $\mathcal{G}^2$, precisament donada per la forma quadràtica $q(b) = (b\widetilde{b})_0$.

Escalars	1
Vectors –segments orientats –*vectors polars*	e_1, e_2, e_3
Bivectors –àrees orientades –*vectors axials*	$e_1\mathbf{i},\ e_2\mathbf{i},\ e_3\mathbf{i}$
Pseudoescalars –*volums orientats*	$\mathbf{i} = e_1e_2e_3$



Teorema (Riesz). Sigui $x, x' \in \mathcal{G}^1$ i $a \in \mathcal{G}^k$. Llavors

$$2\,x \wedge a = xa + \hat{a}x \qquad \triangleright\ x \wedge x' = (xx' - x'x)/2,$$
$$2\,x \cdot a \ = xa - \hat{a}x \qquad \triangleright\ x \cdot x' = (xx' + x'x)/2.$$

■ $ax = a \cdot x + a \wedge x = (-1)^{k+1} x \cdot a + (-1)^k x \wedge a$, d'on $\hat{a}x = -x \cdot a + x \wedge a$. Ara basta sumar (restar) aquesta relació i (de) $xa = x \cdot a + x \wedge a$.

Isometries de E_3

Miralls i teorema de Cartan-Dieudonné. Pin_3 i Spin_3. Rotors i rotacions. Quaternions: H versus $\mathbb{H}$.

Sigui O_3 el grup d'isometries de E_3, $\mathrm{SO}_3 = \mathrm{O}_3^+$ el subgrup de les isometries pròpies (*rotacions*) i $\mathrm{O}_3^- = O_3 - \mathrm{O}_3^+$.

Teorema (Cartan-Dieudonné). Tot element de SO_3 és el producte de *dues simetries especulars* i tot element de O_3^- és *o una simetria especular o el producte de tres simetries especulars*.

- Si u és un vector **unitari** de E_3, l'aplicació $\underline{u} : E_3 \to E_3$,
$$\underline{u}(x) = \hat{u}xu = -uxu$$
és la *simetria especular respecte del pla* $u^\perp$. $\triangleright$ $\underline{u}' = \underline{u} \Leftrightarrow u' = \pm u$.

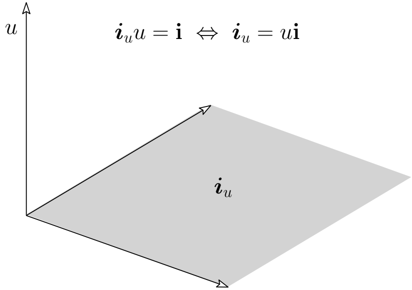
- Sigui Pin$_3 \subset \mathcal{G}$ el conjunt de *pinors*, elements de $\mathcal{G}$ de la forma $s = u_1 \cdots u_m$, $m \in \mathbb{N}$ i $u_1, \ldots, u_m \in E_3$ vectors **unitaris**. Pin$_3$ és un subgrup del grup $\mathcal{G}^\times$ d'elements invertibles (unitats) de $\mathcal{G}$.
$\triangleright$ $\pm 1 = (\pm u)u \in \mathrm{Pin}_3$. $\triangleright$ $s^{-1} = u_m \cdots u_1 = \tilde{s}$.

- Si $s \in \mathrm{Pin}_3$, i posem $\underline{s}(x) = \hat{s}x\tilde{s}$, llavors $\underline{s} = \underline{u}_1 \cdots \underline{u}_m \in \mathrm{O}_3$. Més precisament, $\underline{s} \in \mathrm{O}_3^+$ si m és parell i $\underline{s} \in \mathrm{O}_3^-$ si m és senar. A més, l'aplicació $\mathrm{Pin}_3 \twoheadrightarrow \mathrm{O}_3$, $s \mapsto \underline{s}$, és un **homomorfisme epijectiu** (pel teorema de Dieudonné-Cartan) i el seu nucli és $\{\pm 1\}$.
$\triangleright$ $s = u_1 u_2$, $\hat{s}x\tilde{s} = \hat{u}_1\hat{u}_2 x u_2 u_1 = \underline{u}_1(\underline{u}_2(x))$.

- Els elements parells de Pin$_3$ formen el subgrup Spin$_3$ dels *espinors* (o *rotors*). L'epimorfisme anterior es restringeix a un epimorfisme $\mathrm{Spin}_3 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3$, amb nucli $\{\pm 1\}$. Els rotors tenen la forma $r = u_1 u_2$, u_1 i u_2 unitaris.

Remarca. Donat un vector unitari u, sigui $\boldsymbol{i}_u$ la unitat d'àrea del pla orientat $u^\perp$. Llavors $\boldsymbol{i}_u u$ és un volum unitat positiu, és a dir, $\boldsymbol{i}_u u = \mathbf{i}$, d'on

$$\boldsymbol{i}_u = \mathbf{i}u = u\mathbf{i}.$$



■ Siguin u_1 i u_2 dos vectors unitaris, $u_2 \neq \pm u_1$ i $s = u_1 u_2$. Sigui $\alpha \in (0, \pi)$ l'angle entre u_1 i u_2 i u el vector unitari $u = (u_1 \times u_2)/|u_1 \times u_2| = (u_1 \times u_2)/\sin\alpha$.

Com que $u\mathbf{i}$ és la unitat d'àrea del pla orientat $u^\perp = \langle u_1, u_2 \rangle$,
$u_2 = u_1 \cos\alpha + u_1 u\mathbf{i} \sin\alpha$, i $s = u_1 u_2 = \cos\alpha + u\mathbf{i}\sin\alpha = e^{u\mathbf{i}\alpha}$.
Per tant $\underline{s}(x) = e^{u\mathbf{i}\alpha} x e^{-u\mathbf{i}\alpha}$.

Si x és proporcional a u, llavors x és fix, ja que commuta amb u, i $e^{u\mathbf{i}\alpha} x e^{-u\mathbf{i}\alpha} = x e^{u\mathbf{i}\alpha} e^{-u\mathbf{i}\alpha} = x$. I si x és perpendicular a u, llavors anticommuta amb u i $e^{u\mathbf{i}\alpha} x e^{-u\mathbf{i}\alpha} = x e^{-2u\mathbf{i}\alpha}$.

Teorema (Rotor s i rotació $\underline{s}$)
(1) $s = \cos\alpha + u\mathbf{i}\sin\alpha = e^{u\mathbf{i}\alpha}$, i
(2) $\underline{s} = \underline{u_1}\,\underline{u_2} = R_{u,-2\alpha}$.

Corol·lari (Forma espinorial de les rotacions). Si u és un vector unitari i $\alpha \in [0, 2\pi]$, la rotació d'eix u i amplitud α, $R_{u,\alpha}$, ve donada per la fórmula

$$R_{u,\alpha}(x) = e^{-u\mathbf{i}\alpha/2} x e^{u\mathbf{i}\alpha/2}.$$

■ Per $\alpha = 0$ i $\alpha = 2\pi$, $R_{u,\alpha} = \mathrm{Id}$, però $e^{u\mathbf{i}2\pi/2} = \cos\pi = -1$.

Teorema (Olinde Rodrigues). Si posem $R_{u'',\alpha''} = R_{u',\alpha'} \circ R_{u,\alpha}$, i $\varphi = \angle(u, u')$,

$$\cos\tfrac{\alpha''}{2} = \cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha'}{2} - \cos\varphi\sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\alpha'}{2},$$
$$u''\sin\tfrac{\alpha''}{2} = u\sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha'}{2} + u'\cos\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\alpha'}{2} + (u\times u')\sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\alpha'}{2}.$$

▷ El rotor de $R_{u'',\alpha''}$ d'una banda és $\cos\frac{\alpha''}{2} + u''\mathbf{i}\sin\frac{\alpha''}{2}$ i de l'altra

$$(\cos\tfrac{\alpha}{2} + u\mathbf{i}\sin\tfrac{\alpha}{2})(\cos\tfrac{\alpha'}{2} + u'\mathbf{i}\sin\tfrac{\alpha'}{2}).$$

La part real d'aquest producte és $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha'}{2} - (uu')_0\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha'}{2}$ i $(uu')_0 = u\cdot u' = \cos\varphi$.

La part imaginària és $u\mathbf{i}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha'}{2} + u'\mathbf{i}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha'}{2} - (uu')_2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha'}{2}$, i $-(uu')_2 = -u\wedge u' = (u\times u')\mathbf{i}$.

- Definim $\mathbf{H} = \mathcal{G}_3^+ = \langle 1, e_1\mathbf{i}, e_2\mathbf{i}, e_3\mathbf{i}\rangle$.
- Si posem $\boldsymbol{i}_k = e_k\mathbf{i}$, $\underline{\boldsymbol{i}}_k = R_{e_k,\pi}$ (la simetria axial d'eix e_k).
- Els elements $h \in \mathbf{H}$ es poden expressar de manera única en la forma $h = \rho + x\mathbf{i}$, on $x \in E_3$.
- Com que $\tilde{h} = \rho - x\mathbf{i}$, $|h|^2 = h\tilde{h} = \rho^2 + x^2$, d'on $\mathbf{H}$ és:
  (1) un **espai euclidià** i
  (2) un **cos**. $\triangleright$ $h^{-1} = \tilde{h}/|h|^2$ si $h \neq 0$.
- $\mathbf{H} \simeq \mathbb{H}$. $\triangleright$ $(\boldsymbol{i}_1)^2 = (-\boldsymbol{i}_2)^2 = (\boldsymbol{i}_3)^2 = (\boldsymbol{i}_1)(-\boldsymbol{i}_2)(\boldsymbol{i}_3) = -1$.

Teorema (forma exponencial). Donat $h = \rho + x\mathbf{i}$ amb $x \neq 0$, hi ha un únic $\alpha \in (0,\pi)$ tal que $h = |h|(\cos\alpha + u\mathbf{i}\sin\alpha) = |h|e^{u\mathbf{i}\alpha}$, on $u = x/|x|$.

$\triangleright$ Podem suposar que h és unitari: $\rho^2 + |x|^2 = 1$. Sigui $\alpha \in (0,\pi)$ l'únic angle tal que $\rho = \cos\alpha$, $|x| = \sin\alpha \Leftrightarrow x = u\sin\alpha$. Llavors $h = \cos\alpha + u\mathbf{i}\sin\alpha = e^{u\mathbf{i}\alpha}$.

Corolari. $\mathrm{Spin}_3 = \{h \in \mathbf{H} | h\tilde{h} = 1\}$, és a dir, l'esfera unitat de $\mathbf{H}$.

□[2018a]

Les àlgebres $\mathcal{G}_{r,s}$

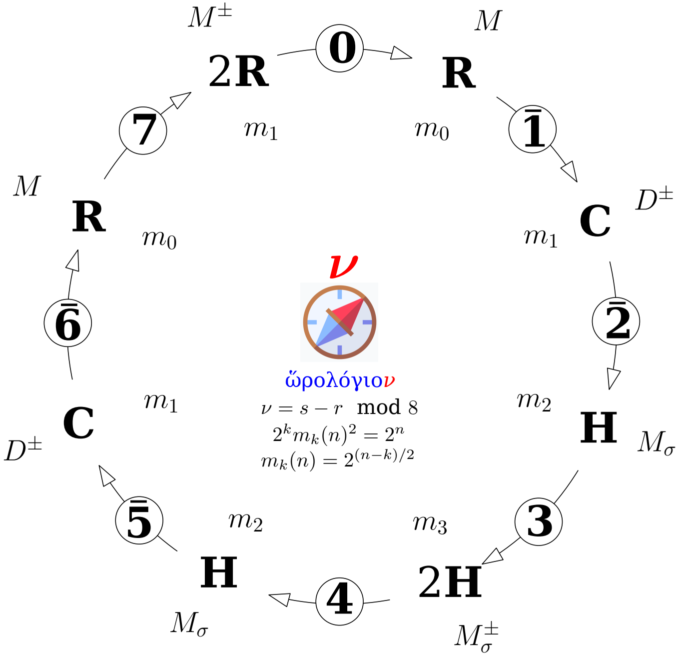
- $E = E_{r,s}$ un espai real de dimensió $n = r + s$ dotat d'un mètrica q de signatura (r, s) (*espai geomètric* lineal). $E^{\times} = \{x \in E \mid q(x) \neq 0\}$ (vectors *no isòtrops*).
  - ▷ E_n si $s = 0$ (*espai euclidià*), $\bar{E}_n = E_{\bar{n}}$ si $r = 0$ (*espai antieuclidià*).
  - ▷ $E_{1,3}$: *espai de Minkowski* (relativitat lineal).
  - ▷ $E_{r,s} \subset E^c_{r,s} = E_{r+1,s+1}$: *clausura conforme*. ▷ $E^c_3 = E_{4,1}$.
- Un vector $u \in E$ es diu unitari si $u^2 = q(u) = \pm 1$.
- Una base *ortonormal* és una base ortogonal de vectors unitaris.
- $\mathrm{O} = \mathrm{O}_{r,s}$: grup d'*isometries* de $E_{r,s}$. ▷ $\mathrm{O}_{1,3}$: *grup de de Lorentz*.
- $\mathrm{SO} = \mathrm{SO}_{r,s}$: subgrup d'*isometries pròpies* (conserven orientació).
  - ▷ $\mathrm{SO}_{1,3}$: *transformacions de Lorentz pròpies*.
- $\mathrm{SO}^0_{r,s} \subset \mathrm{SO}_{r,s}$: elements d'SO connectats per un camí continu amb 1.
  - ▷ Si $r = 0$ o $s = 0$, $\mathrm{SO}^0_{r,s} = \mathrm{SO}_{r,s}$; altrament, $\mathrm{SO}_{r,s} = \mathrm{SO}^0_{r,s} \sqcup \tau\mathrm{SO}^0_{r,s}$.
  - ▷ $\mathrm{SO}^0_{1,3}$: *grup restringit de Lorentz* (transformacions *ortocrones*).
- $\mathrm{O}^c_{r,s} = \mathrm{O}_{r+1,s+1}$ és isomorf al *grup conforme* de $E_{r,s}$.

Teorema (Cartan-Dieudonné). Tot element de $O_{r,s}$ és producte de (com a molt n) simetries especulars.

- $\Lambda = \Lambda E_{r,s}$ àlgebra exterior. L'extensió natural de q a Λ serà denotada pel mateix símbol. El producte interior de Λ, $a \cdot a'$, es defineix per regles similars a les del cas E_3, i el mateix amb les involucions de *paritat* $\hat{a}$ i de *reversió* $\tilde{a}$: si $a \in \Lambda^k$, $\hat{a} = (-1)^k a$ i $\tilde{a} = (-1)^{k/\!\!/2}$.

Teorema (Clifford). Λ admet un únic producte bilineal **associatiu**, amb unitat 1 (*producte geomètric*), que compleix $xa = x \cdot a + x \wedge a$ per a tot $x \in E$ i $a \in \Lambda$.

- Posem $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{r,s}$ per denotar l'estructura formada per Λ, els productes interior, exterior i geomètric, i les dues involucions.
- $x^2 = q(x)$ (*reducció*). $\triangleright$ x invertible $\Leftrightarrow x \in E^{\times}$, $x^{-1} = x/q(x)$.
- $xx' = -x'x \Leftrightarrow x \cdot x' = 0$ (*anticommutació*).
- Si $a, a' \in \mathcal{G}^k$, $q(a, a') = (a\tilde{a}')_0$. $\triangleright$ Si a és una brana, $q(a) = a\tilde{a}$.
- $\mathcal{G}_{0,0} \simeq \mathbb{R}$; $\mathcal{G}_{0,1} \simeq \mathbb{C}$; $\mathcal{G}_{0,2} \simeq \mathbb{H}$; $\mathcal{G}_{0,3} \simeq 2\mathbb{H}$; $\mathcal{G}_{0,4} \simeq \mathbb{H}(2)$; $\mathcal{G}_{0,5} \simeq \mathbb{C}(4)$; $\mathcal{G}_{0,6} \simeq \mathbb{R}(8)$; $\mathcal{G}_{0,7} \simeq 2\mathbb{R}(8)$.
- $\mathcal{G}^+_{r,s} \simeq \mathcal{G}_{r,s-1}$ si $s > 0$, $\simeq \mathcal{G}_{s,r-1}$ si $r > 0$. $\mathcal{G}^+_{r,s} \simeq \mathcal{G}^+_{s,r}$.


$M^{\pm}$
2R
0
M
R
m_1
m_0
7
$\bar{1}$
M
R
m_0
C
$D^{\pm}$
m_1
ν
$\bar{6}$
$\bar{2}$
ὡρολόγιον
$\nu = s - r \mod 8$
$2^k m_k(n)^2 = 2^n$
$m_k(n) = 2^{(n-k)/2}$
m_1
m_2
C
H
$D^{\pm}$
M_σ
$\bar{5}$
m_2
m_3
3
H
4
2H
M_σ
$M_\sigma^{\pm}$

```
F =['R','C','H', '2H', 'H', 'C','R','2R']
K =[0,1,2,3,2,1,0,1]

def Grs(r,s):
    nu = (s-r) % 8
    k = K[nu]
    m = 2**((r+s-k)//2)
    if m==1: A = F[nu]
    else: A = F[nu]+'('+str(m)+')'
    return A

def Gn(n):
    L = []
    if n==0: return [F[0]]
    for r in range(n+1):
        s = n-r
        L += [Grs(r,s)]
    return L
```

```
for nu in range(0,16): print(Grs(0,nu))

R,      C,      H,      2H,      H(2),  C(4),  R(8),   2R(8)

R(16), C(16), H(16), 2H(16), H(32), C(64), R(128), 2R(128)

for n in range(0,7): print(Gn(n))

R
C,      2R
H,      R(2),  R(2)
2H,     C(2),  2R(2), C(2)
H(2),  H(2),  R(4),  R(4),  H(2)
C(4),  2H(2), C(4),  2R(4), C(4),  2H(2)
R(8),  H(4),  H(4),  R(8),  R(8),  H(4), H(4)
2R(8), C(8),  2H(4), C(8),  2R(8), C(8), 2H(4), C(8)
```

- $\mathrm{Pin} = \mathrm{Pin}_{r,s}$ és el subgrup de $\mathcal{G}^\times$ format pels *pinors*: productes d'un nombre finit de vectors unitaris.

- $\mathrm{Spin} = \mathrm{Spin}_{r,s}$ és el subgrup d'*espinors* (pinors parells) de Pin, és a dir, Pin^+.

- $\mathrm{Spin}^0 = \mathrm{Spin}^0_{r,s}$ és el subgrup de *rotors*, és a dir, espinors s tals que $s\tilde{s} = 1$.
  - ▷ Si u i u' són vectors unitaris de signes contraris, $s = uu'$ és espinor, però no rotor: $s\tilde{s} = uu'u'u = u^2u'^2 = -1$.

- Si u és un vector unitari, $\underline{u}(x) = -uxu^{-1}$ és la simetria especular respecte de l'hiperplà $u^\perp$.

- Si $s \in \mathrm{Pin}$ és producte de m vectors unitaris, $\underline{s}$ és producte de m simetries especulars i per tant $\underline{s} \in \mathrm{O}$.

- Tenim $\mathrm{Pin} \twoheadrightarrow \mathrm{O}$, $\mathrm{Spin} \twoheadrightarrow \mathrm{SO}$, $\mathrm{Spin}^0 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}^0$, i el nucli dels tres és $\{\pm 1\}$.

□**[2018b]**

■ Un producte uv de dos vectors unitaris linealment independents del mateix signe ($\Leftrightarrow u^2v^2 = 1$) és un rotor (*pla*).

Teorema (Cartan-Dieudonné per rotors). Tot rotor és producte de com a molt $n /\!\!/ 2$ rotors plans. ▷ Un rotor per E_3, dos rotors per $E_{1,3}$.

■ Sigui $uv = u \cdot v + u \wedge v$ un rotor pla. Llavors

$$q(u \wedge v) = u^2v^2 - (u \cdot v)^2 = 1 - (u \cdot v)^2.$$

El rotor es diu *el·líptic* (*hiperbòlic*) si $(u \cdot v)^2 < 1$ (si $(u \cdot v)^2 > 1$).

Teorema (1) Si uv és el·líptic i $\alpha \in (0, \pi)$ és l'angle tal que $u \cdot v = \cos\alpha$, llavors, posant $a = (u \wedge v)/\sin\alpha$, tenim $a^2 = -q(a) = -1$ i $uv = e^{a\alpha}$ (dóna una rotació ordinària en el pla $\langle u, v\rangle$).

(2) Si uv és hiperbòlic i $\alpha > 0$ és tal que $\operatorname{ch}\alpha = |u \cdot v|$, llavors, posant $a = (u \wedge v)/\operatorname{sh}\alpha$, tenim $a^2 = -q(a) = 1$ i $uv = \pm e^{\pm a\alpha}$, on $\pm$ és el signe de $u \cdot v$ (dóna una *rotació hiperbòlica* en el pla $\langle u, v\rangle$).

▷ En el cas $E_{1,3}$, els rotors hiperbòlics corresponen als *boosts* relativistes i els el·líptics a les rotacions.

☐[**2018a**] (secció 1.4 i capítol 3), ☐[**2018c**], ☐[**2019a**]

☐**2009** S. Xambó: *A Clifford perspective on Klein's geometry*, `https://web.mat.upc.edu/sebastia.xambo/K2/K2-Xambo.pdf`. Presentació a la Conferència **Didactics of Mathematics as a Mathematical Discipline** (Universitat de Madeira, Funchal, 1-4 octubre 2009).

☐**2018a** C. Lavor, S. Xambó i I. Zaplana: *A Geometric Algebra Invitation to Space-Time Physics, Robotics and Molecular Geometry*. Springer Briefs in Mathematics. X+128 p.

☐**2018b** S. Xambó: *Real Spinorial Groups—A short mathematical introduction*. Springer Briefs in Mathematics. VIII+151 p.

☐**2018c** S. Xambó: *From Leibniz' characteristica geometrica to contemporary geometric algebra*, `https://web.mat.upc.edu/sebastia.xambo/HistoricalEssays/2018-Xambo--From-Leibniz-CG-to-GA.pdf`. **Quaderns d'història de l'enginyeria**, vol. XVI (2018), p. 103-134. Volum especial dedicat a commemorar Leibniz (1646-1716).

□**2019a** S. Xambó: *A Light Dream*,
`https://web.mat.upc.edu/sebastia.xambo/GA/2019-Xambo--A-light-dream.pdf`. Actes de la Conferència **2019 Interdisciplinary Colloquium in Topology and its Applications** (editades per M. Bruguera, M. J. Chasco, i X. E. Domínguez), Universitat de Vigo, 2019, 33-38.

□**2019b** S. Xambó i E. U. Moya: *Geometric calculus meets deep learning*,
`https://web.mat.upc.edu/sebastia.xambo/ICIAM2019/GC&DL-08.pdf`. Conferència a l'ICIAM2019, mini-simposi **Systems, Patterns and Data Engineering with Geometric Calculi**. 16 de juliol de 2019, València.

□**2019c** S. Xambó: *Geometric Algebra. Mathematical Structures and Applications*,
`https://web.mat.upc.edu/sebastia.xambo/GA/s-uned.pdf`. Notes d'un minicurs a la FM de la UNED, 3-4 octubre 2019.

□**2020a** S. Xambó (amb la col·laboració N. Sayols i J. M. Miret): *WIT: A symbolic system for computations in IT and EG (programmed in pure Python)*,
`https://web.mat.upc.edu/sebastia.xambo/ITEG/s-wit-imuva-I.pdf` i
`https://web.mat.upc.edu/sebastia.xambo/ITEG/s-wit-imuva-II.pdf`. Curs doctoral de 5 hores a l'IMUVA, 13-17 gener 2020.

□**2020b** S. Xambó. *Theoretical Resources for Deep Learning*,
`https://web.mat.upc.edu/sebastia.xambo/ML/s-icca12.pdf`. Conferència a ICCA12, mini-symposi sobre **Geometric Calculi and Deep Learning: a Long-Term Relationship**. 4 d'agost de 2020.

SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES ·I·E·C·

Bons auguris per al curs 2020-2021 !!

Amic Joaquim, moltes gràcies! Bona tarda a tothom!!

Presidenta..., passats un dies des d'acceptar la teva invitació, vaig preguntar-te (20922) quin tema o temes consideraves que podrien ser adients per a la ocasió.

Em vas respondre (20924) que "pensant una mica en els temps que estem vivint, la meva única suggerència seria que tingués un to desenfadat i divertit".

- Havent acceptat, no he vist altra via que intentar-ho, tot i els seriosos dubtes, empíricament ben fundats, de poder assolir aquetes condicions. Espero que hi ajudi parlar de matemàtiques possiblement conegudes, almenys en una bona part, des de perspectives que probablement ho són menys.

- En tot cas, agraeixo la invitació i l'honor que representa per a mi.

- Vull dedicar aquesta intervenció a la memòria del doctor Vaquer i a la de les persones que ens han anat deixant al llarg dels anys i que han estat una inspiració per a moltes i molts de nosaltres.

P

Al peu de la pàgina he posat una adreça des de la qual us podeu baixar aquesta presentació. També des de 'Talks' a la meva pàgina web.

En escollir la temàtica, he procurat tenir en compte quatre idees:

1) Contingut matemàtic, potencialment aplicable a diverses problemàtiques.

2) Haver-m'hi barallat suficientment com per poder parlar-ne amb una mica de confiança.

3) Que sigui intel·ligible per a tota persona amb coneixements bàsics de matemàtiques.

4) Pedagògicament viable, des de treballs de recerca a secundària (com ara sobre geometria o relativitat) fins a investigacions avançades en una diversitat de dominis.

He restringit els materials orientatius (pp. 37 i 38) a treballs d'elaboració pròpia, sovint en col·laboració. La seva funció és, en particular, fer de passatges a les bibliografies que contenen, evitant-me així haver de compilar-ne una, que seria molt extensa, per aquesta ocasió. Aquests materials estan identificats per un quadre blanc seguit de l'any, o l'any i una lletra, com per exemple el llibre de **Crowe** que veieu a la patalla.

Començo amb una saga ben coneguda: Es va inventar $\mathbb{Z}$ per poder restar sempre;

... i $\mathbb{Q}$ per poder dividir sempre per nombres enters no nuls. Propina: entre dos racionals, sempre n'hi podem trobar un altre. Encara més, els racionals són suficients per aproximar qualssevol quantitat tant com vulguem.

... però tot i així $\mathbb{Q}$ té forats, com ara $\sqrt{2}$ (Pitàgores).

... per tapar-los s'inventa $\mathbb{R}$, postulant que tot conjunt dels nous nombres té un suprem si està fitat superiorment. La propina és que això possibilita no només $\sqrt{2}$, sinó arrels n-èsimes de nombres positius per a tot n, i per tant potències d'exponents racionals, ... i també d'exponents reals. És l'entrada a l'anàlisi real.

... però a $\mathbb{R}$ no hi ha $i = \sqrt{-1}$, cosa que introdueix una casuística en la discussió de les arrels de polinomis, començant pels de segon grau. Afegint i a $\mathbb{R}$, però mantenint suma i multiplicació, tenim els nombres complexos $\mathbb{C}$, de la forma $z = a + bi$, que podem escriure en forma polar $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = re^{i\alpha}$. Aquí les propines es multipliquen: tot nombre complex z té n arrels, distintes si el nombre és no nul; més en general, tot polinomi de grau n té exactament n arrels, comptant multiplicitats (Gauss, TFA). Hem adquirit entrada a l'anàlisi complexa...

$\searrow$

I ara ens podem plantejar una ardida quèstió, la que veieu a la pantalla.

Entre les múltiples derivacions que té prosseguir aquesta aventura hi ha la possibilitat, ja força desenvolupada, d'enginyar neurones i xarxes neuronals que processin elements d'àlgebres que expressin els fets geomètrics rellevants de manera natural. Però avui no tractaré aquesta qüestió i remeto al material orientatiu □[**2020b**] (conferència del 4 d'agost a l'ICCA12), ja que l'objecte de la presentació d'avui és desgranar com funcionen aquestes àlgebres, principalment via els exemples del pla i l'espai euclidians (àlgebres de **Wessel** i de **Pauli**, respectivament).

També ometré parlar del riquíssim llegat històric dels conceptes que tractarem, limitant-me a senyalar, a més del libre de **Crowe** ja esmentat, els materials □[**2009**] (*Una visió Clifford de la geometria de Klein*), les seccions 6.2 a 6.4 del llibre □[**2018b**] (sobre grups espinorials), i l'article □[**2018c**] sobre la l'evolució de la idea de *caracteristica geometrica* de Leibniz.

P

Sigui E_2 un pla euclidià. El valor de considerar primer aquest familiar objecte rau en que les seves propietats es generalitzen de manera natural a qualsevol dimensió i signatura, com veurem d'aquí a una mica en el cas de E_3 i després en el cas general.

$x \wedge x'$ crea una extensió d'ordre 2 (*àrea orientada*) a partir dels vectors x i x' (extensions d'ordre 1), i per això s'anomena *producte exterior*, en contraposició al producte escalar, $x \cdot x'$, que crea un escalar (extensió d'ordre 0) a partir de x i x'.

La figura permet intuir perquè el producte exterior és bilineal. En els llibres de text s'introdueix sovint d'una manera formal sense fer gaire referència al seu contingut geomètric.

La fórmula final mostra que les àrees orientades formen un expai vectorial de dimensió 1, però sense cap base distingida (i per això de vegades s'anomenen *pseudoescalars*).

El producte exterior només depèn de l'estructura vectorial de E_2, no del producte escalar (o estructura mètrica).

P

La unitat d'àrea, $\boldsymbol{i} = e_{12}$, està definida llevat d'un signe. Escollir-ne una de les dues possibles equival a orientar el pla. L'orientació contrària a una orientació $\boldsymbol{i}$ és $-\boldsymbol{i}$.

La fórmula del producte escalar mostra la seva relació amb l'angle, i és la que es pren com a definició d'angle en espais euclidians de qualsevol dimensió.

La fórmula del producte exterior també és general, si definim $\boldsymbol{i}$ com la unitat d'àrea del pla orientat definit per x i x'

P

Un matemàtic no té cap dificultat en una expressió d'aquesta mena, no només per familiaritat amb l'àlgebra exterior, o àlgebra de Grassmann (descoberta fa més de disset dècades), i en la qual se sumen extensions d'ordres diferents (com en aquesta equació, un escalar i un bivector), sinó perquè la consistència 'dimensional' de les equacions a la qual s'han d'atenir els físics no té cap paper primari en matemàtiques. En certa manera, aquest paper en matemàtiques, i en particular en el contex d'avui, el fan les graduacions, com ara la de de l'àlgebra exterior, en el sentit que una igualtat equival a la igualtat de les components de diversos graus per separat, com ara que la igualtat de dos nombres complexos equival a la igualtat de les seves parts reals i imaginàries.

Però el fet real és que, a banda d'aquesta percepció de pomes i taronges, l'article de Jaynes és un magnífic treball. Deixeu-me recordar també que és autor de l'extens compendi pòstum *Probability theory, the logic of science* (CUP, 2003, $\mathrm{xxx}+727$ p.).

P

La part escalar $x \cdot x'$ és commutativa, mentre que la part $x \wedge x'$ és alternada.

Quan $x' \sim x$, només queda la part escalar. Per exemple, si $x' = x$, tenim la regla de reducció.

I quan $x' \perp x$, llavors només queda la part alternada i obtenim que el producte geomètric de dos vectors perpendiculars és anticommutatiu.

Si el producte existeix, ha de ser el producte bilineal donat per la taula. I és un exercici comprovar que el producte és associatiu: basta fer l'exercici, com a l'exemple, per tres elements de la base estesa (dita base de Clifford).

P

Les fórmules de Riesz mostren que el producte geomètric, i la graducació lineal, determinen el producte exterior i el producte geomètric.

La involució de paritat (rp. de reversió) és un automorfisme (rp. antiautomorfisme) dels tres productes, i les fórmules de Riesz permeten deduir aquestes afirmacions per als productes interior i exterior a partir de les corresponents afirmacions per al producte geomètric.

P