



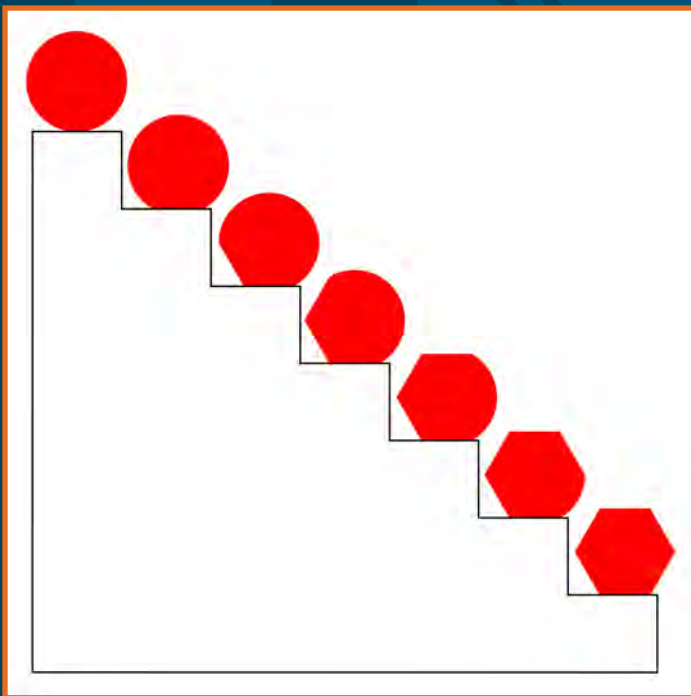
# SCM

# Notícies

44

Desembre 2018

- Marc Noy, medalla Narcís Monturiol
- Conferència MATRIX al MMACA
- Reformes educatives a secundària, Manel Sol
- Pensions privades i el retorn a les tontines, Montserrat Guillen
- Conversa entre Carles Bonet i Narcís Clara
- La combinatòria en l'art del segle XX, Lali Barrière



Matematicopoema, Toni Prat



Institut  
d'Estudis  
Catalans



SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES

President: Xavier Jarque i Ribera  
Vicepres.: Enric Ventura i Capell  
Vicepres. adj.: Iolanda Guevara  
i Casanova  
Secretari: Albert Ruiz i Cirera  
Tresorera: Natàlia Castellana i Vila  
Vocals: Albert Avinyó i Andrés  
Marta Berini i López-Lara  
Abraham De la Fuente i Pérez  
Núria Fagella i Rabionet  
Josep Grané i Manlleu  
Carles Romero i Chesa  
Manuel Udina i Abelló  
Delegat  
de l'IEC: Pilar Bayer i Isant

Comunicacions:

Carrer del Carme, 47  
08001 Barcelona  
Tel.: 932 701 620  
Fax: 932 701 180  
A/e: scm@iec.cat

Secretària: Núria Fuster  
Tel.: 933 248 583 de 10 a 17 h

SCM/Notícies  
Desembre 2018. Número 44

Edita:  
Societat Catalana de Matemàtiques  
(filial de l'Institut d'Estudis Catalans)  
Editor en cap: Albert Avinyó i Andrés  
albert.avinyo@udg.edu

Disseny: Teresa Sabater

Foto de portada:  
Matematicopoemes  
Toni Prat

ISSN: 1696-8247  
Dipòsit Legal: B.9480-2003

## Índex

<b>La Junta informa</b>	<b>1</b>
Report de la Junta . . . . .	1
Assemblea general i estat de comptes . . . . .	2
<b>Editorial</b>	<b>5</b>
<b>Internacional</b>	<b>6</b>
La columna de l'EMS . . . . .	6
Assemblea general de la IMU i ICM2018 . . . . .	7
Trobada del Comitè Executiu de l'EMS a Barcelona	12
<b>Noticiari</b>	<b>13</b>
Les universitats informen . . . . .	13
Activitat del MMACA a la Bisbal d'Empordà . . . . .	19
Presentació del volum <i>Grècia IIa de la Història de la matemàtica</i> de Josep Pla i Carrera . . . . .	21
Marc Noy, medalla Narcís Monturiol . . . . .	23
<b>Activitats</b>	<b>24</b>
CSACS 2018 . . . . .	24
3a Conferència MATRIX . . . . .	26
XV Jornada d'Educació Matemàtica . . . . .	30
Activitats amb ajut de la SCM . . . . .	32
<b>Premis</b>	<b>35</b>
<b>Contribucions</b>	<b>37</b>
Pensions privades i el retorn a les tontines, un invent de fa 300 anys . . . . .	37
Reformes educatives a Secundària . . . . .	41
Beca ERC 2018: Regularitat i singularitats en EDP el·líptiques . . . . .	55
<b>Conversa a dues bandes</b>	<b>58</b>
<b>La pregunta de la SCM/Notícies</b>	<b>61</b>
<b>Empresa</b>	<b>70</b>
Interdisciplinarietat en les matemàtiques . . . . .	70
Entrevista a Jimena Llopis, directora de The Alpha Group . . . . .	72
<b>Bits</b>	<b>77</b>
El laboratori a classe . . . . .	77
<b>Cultura</b>	<b>79</b>
La combinatòria en l'art del segle xx . . . . .	79
Heisenberg i Bohr a «Copenhaguen» . . . . .	87
«Números y figuras» de Hans Rademacher i Otto Toeplitz . . . . .	90
Relat breu: El caramel . . . . .	91
<b>Racó biogràfic</b>	<b>94</b>
Leonhard Euler (1707–1783): el mestre de tots nosaltres . . . . .	94
<b>Problemes</b>	<b>102</b>
Matemots . . . . .	108
<b>Tesis</b>	<b>108</b>

## Report de la Junta

Albert Ruiz  
Secretari de la SCM

Aquest report és l'informe de la junta posterior a l'assemblea general de socis, de manera que el contingut es basa en la informació d'aquesta reunió.

El 29 de novembre es va celebrar, dins dels actes d'inauguració del curs, l'assemblea ordinària corresponent a l'any 2018. Aquesta assemblea va anar precedida per la xerrada «Hyperbolic geometry: where battered gems retain their full beauty» a càrrec de Martin Bridson, professor a l'Oxford University i president del Clay Mathematical Institute.

A continuació va començar l'assemblea, es va aprovar l'acta anterior i va començar l'exposició del president de les activitats de la SCM durant l'últim any. D'aquest informe, destaquem les accions dutes a terme després de la revista *SCM/Notícies 43*:

- Pel que fa a representació, el president va informar del desenvolupament de la International Mathematical Union al Brasil aquest estiu, seguida de l'International Congress in Mathematics a Rio de Janeiro.

Entre el 9 i l'11 de novembre, la SCM va acollir la reunió de l'Executive Committee de l'EMS a Barcelona. Duran aquesta reunió es va fer el canvi de presidència de l'EMS, que va passar de Pavel Exner (Praga, República Txeca) a Volker Mehrmann (Berlín, Alemanya).

- Pel que fa a recerca, es va celebrar el CSASC (trobada conjunta amb les societats austríaca, catalana, eslovaca, eslovena i txeca de matemàtiques) el setembre d'enguany a Bratislava, amb la participació de la SCM.
- En l'apartat de secundària, ja ha començat una nova edició de l'ESTALMAT (Estímul del Talent Matemàtic) i està a punt d'acabar l'edició del 2018 del programa Bojos per les Matemàtiques (al gener està previst que comenci l'edició del 2019).

Dins el mateix apartat, s'obrirà properament la inscripció a la Copa Cangur (adreçada a estudiants de segon i tercer d'ESO) i les proves Cangur (adreçada a estudiants des de cinquè de primària fins a segon de batxillerat).

- Pel que fa a reconeixements, el professor Joaquim Bruna (UAB) ha estat nomenat membre numerari del Ple de l'IEC, mentre que el professor Marc Noy (UPC) ha rebut la Medalla Narcís Monturiol. Des de la junta de la SCM felicitem els dos professors per aquest guardó.

El president va tancar la intervenció mostrant la seva preocupació per la falta de matemàtics que vulguin ser professors de matemàtiques a l'ensenyament secundari. El torn de paraules posterior es va centrar en aquesta circumstància, i els assistents van expressar el seu punt de vista. Entre altres consideracions, van manifestar que no és un problema local, sinó que també es produeix a diversos països del nostre entorn.

A continuació la professora Natàlia Castellana, tesorera de la SCM, va exposar l'estat de comptes de l'any 2017 i el pressupost del 2019, informes que l'assemblea va aprovar per assentiment.

En el torn obert de paraules, la professora Dolors Herbera (UAB) va comunicar que es presentarà per presidir la SCM amb la candidatura formada pels professors Josep Vives (UB) com a vicepresident de recerca i universitats, Abraham de la Fuente (Departament d'Ensenyament) com a vicepresident d'ensenyament secundari, Inma Baldomà (UPC) com a secretària i Albert Granados (Departament d'Ensenyament) com a tresorer.

Sobre l'elecció de la nova junta directiva, properament s'obrirà un nou període per presentar candidatures i es convocarà una assemblea extraordinària per fer-ne l'elecció.

Per acabar, us informem que la SCM ha donat suport al Barcelona Weekend in

Group Theory mitjançant el fons de promoció d'activitats.

El canvi de junta directiva fa que aquest sigui l'últim informe de qui el sub-

criu, de manera que aprofito aquestes línies per agrair la confiança que han tingut en mi tant Joan Solà Morales com Xavier Jarque.

## Assemblea general i estat de comptes

Natàlia Castellana  
Tresorera de la SCM

Benvolguts socis,

Ens plau fer-vos arribar el resum comptable de l'any 2017.

### Pressupost de la SCM per a l'any 2017 (aprovat per l'Assemblea en data 12 de novembre de 2015)

Ingressos 2015		Despeses 2015	
Quotes	26.500,00	Publicacions (2 Butlletins, 2 Notícies, 1 Noubiaix)	20.000,00
Vendes	150,00	Traspàs de quotes EMS	1.150,00
Internacionalització	1.550,00	Internacionalització (EMS+CIMPA)	1.550,00
Cangur	125.000,00	Quota IMU	2.000,00
Fundació Cellex	20.000,00	Premi Évariste Galois	1.000,00
IEC (publicacions)	5.000,00	Premi Emmy Noether	2.000,00
Fecyt (per a Estalmat)	11.000,00	Olimpíada	5.000,00
Feemcat (per a Estalmat)	15.000,00	Cangur	128.000,00
IEC (activitats científiques)	10.000,00	Estalmat	30.000,00
Fundació Catalunya La Pedrera	8.000,00	Bojos per les Matemàtiques	8.000,00
BMD2017 (ajuts i inscripció)	10.000,00	BMD2017	20.000,00
Ingressos financers	700,00	SCM-Swedish-RSME	5.000,00
Romanent 2016	26.200,00	EMS & SCM Joint Meeting 2017	3.000,00
<b>Total</b>	<b>249.100,00</b>	Trobada SCM	1.000,00
		Jornada d'Ensenyament	2.000,00
		Conferències	600,00
		Fons d'ajut a activitats	6.000,00
		MMACA	3.000,00
		Secretaria/Personal	6.000,00
		Despeses financeres	300,00
		Missatgeria i correus	3.500,00
		Publicacions	20.000,00
		<b>Total</b>	<b>249.100,00</b>

A continuació us presentem el balanç real de les diferents activitats dutes a terme l'any 2017:

Concepte	Ajuts IEC	Altres ajuts	Ingressos	Despeses
Ajuts activitats	10.000,00			
Publicacions	5.231,82		137,11	16.956,67
Ajut per internacionalitat (EMS)	1.350,00			1.350,00
Ajut per internacionalitat (IMU)	2.000,00			2.000,00
Quotes CIMPA				200,00
Quota Conferència Decanos				150,00
Quotes SCM			25.030,00	
Traspàs de quotes EMS				1.075,00
Web Ixole (40%)				1.714,20
Despeses secretaria				894,82
Fons de promoció				3.497,67
Despeses de representació				1.536,19
Premi Évariste Galois				1.000,00
Premi Albert Dou				2.500,00
Barcelona Dynamical System Prize		4.000,00		4.000,00
Premi Emmy Noether		1.600,00		1.600,00
Jornada Premi Noether				655,64
Trobada RSME-SCM-SSM (Umea)	1.000,00			2.771,55
Trobada EMS-SCM (Edimburg)	1.000,00			3.820,09
CSASC 2016				97,14
Jornada Sistemes Dinàmics			900,00	781,86
Jornada Abel in Barcelona				647,10
Barcelona Mathematical Days	1.500,00		2.280,00	10.174,22
Jornada d'Educació Matemàtica				2.023,11
Jornada Lliçó Inaugural/Assemblea				158,60
Cangur			149.132,50	107.838,69
Olimpíada		1.654,24		3.656,65
Estalmat		14.004,67		25.739,10
Bojos per les Matemàtiques		8.000,00		11.290,61
7 de Mates		1.105,43		1.105,43
MMACA				3.000,00
Correus			1.212,96	3.550,45
Missatgeria				563,38
Despeses personal				7.256,24
Ingressos financers			287,30	
Despeses financeres				288,96
<b>Totals</b>	<b>22.081,82</b>	<b>30.364,34</b>	<b>178.979,87</b>	<b>223.893,37</b>

En resum, l'any 2017 hem tingut un total de 231.426,03 euros d'ingressos i un total de 223.893,37 euros de despeses, cosa que fa que hi hagi un romanent de 7.532,66 euros.

Us detallem les activitats que han estat subvencionades amb el fons de promoció d'activitats aquest any 2016. Val a dir que no sempre coincideix l'any del pagament de la subvenció amb l'any de la concessió.

## Fons de promoció d'activitats, 2016

Activitat	Import
Barcelona Topology Workshop	479,58
Jornades Associació Catalana de Geogebra	485,46
Women in Stem, 7/2017 IEC	564,00
Planter de Sondeigs i Experiments 2017	377,76
Reunió del Projecte del Meridià Verd	270,28
Jornades Interacció entre Sistemes Dinàmics i Equacions en Derivades Parcial 2015	350,00
Jornades Interacció entre Sistemes Dinàmics i Equacions en Derivades Parcial 2016	350,00
Jornada d'Investigadors Predoctorals Interdisciplinària	236,11
Topic in complex Dynamics 2017 (hotel Caledonian)	384,48
<b>Total</b>	<b>3.497,67</b>

L'import del fons de promoció a l'inici de l'any 2017 era de 6.132,89 euros. Les despeses van ser de 3.497,67 euros i el fons va acabar amb un total de 2.635,22 euros.

Tot seguit us presentem el pressupost per a l'any 2019 aprovat a l'Assemblea General del dia 29 de novembre de 2018.

## Pressupost de la SCM per al 2019

Ingressos 2019	Despeses 2019
Quotes	25.500,00
Vendes	150,00
Internacionalització (EMS+IMU)	3.350,00
Barcelona Dynamical Systems Prize	4.000,00
Inscripcions Cangur	115.000,00
Feemcat (per a Estalmat)	5.000,00
Fundació Privada Cellex (per a Estalmat)	6.000,00
Fundació Privada Cellex (Premi Emmy Noether)	2.000,00
Fundació Privada Cellex (Olimpíada)	1.500,00
Fundació Privada Cellex (7 de Mates)	1.000,00
Ajut IEC Publicacions	5.000,00
Ajuts IEC i Secció	6.000,00
Fundació Catalunya La Pedrera (Bojos per les Matemàtiques)	8.000,00
Ingressos financers	200,00
Romanent 2018	25.075,00
<b>Total</b>	<b>207.775,00</b>
	Traspàs quotes EMS
	1.075,00
	Publicacions
	17.000,00
	Internacionalització (EMS+IMU)
	3.350,00
	Barcelona Dynamical Systems Prize
	4.000,00
	Quota CIMPA
	200,00
	Conferència Decanos
	150,00
	Premi Évariste Galois
	1.000,00
	Premi Emmy Noether
	2.000,00
	Premi Albert Dou
	2.500,00
	7 de Mates
	1.000,00
	Olimpíada
	3.000,00
	Cangur
	115.000,00
	Estalmat
	25.000,00
	Bojos per les Matemàtiques
	8.000,00
	Trobada SCM
	1.000,00
	Suport 3CEM (2020)
	2.000,00
	MMACA
	3.000,00
	Jornada d'Ensenyament
	1.000,00
	Fonts d'ajut activitats
	6.000,00
	Conferències/Lliçó inaugural
	600,00
	Despeses de secretaria/personal
	7.700,00
	Despeses financeres
	200,00
	Missatgeria i correus
	3.000,00
	<b>Total</b>
	<b>207.775,00</b>

## Editorial

Albert Avinyó

Editor de la *SCM/Notícies*

Benvolguts socis i lectors,

Són les 10 del matí del diumenge 23 de desembre i, en aquests moments, estic assegut al mateix bar, i també a la mateixa taula, de la platja de l'Escala des d'on vaig escriure el meu primer editorial de la *SCM/Notícies*, ara fa una mica més de tres anys i mig. Després d'una passejada per tota la costa escalenca, des de Sant Martí d'Empúries fins al port, i de fer un bon esmorzar amb tota la badia de Roses al davant i els raigs de sol de l'hivern a tocar de la cara, em dispo a escriure aquest breu editorial que tancarà aquest número de la *SCM/Notícies* i que, per a mi, representarà l'inici de les vacances de Nadal.

En primer lloc, i tal com he fet en altres editorials, voldria donar la benvinguda i expressar el meu agraïment més sincer a dos nous col·laboradors de la *SCM/Notícies*. D'una banda, la Lali Barrière, professora del Departament de Matemàtiques de la UPC, que compartirà amb la Maria Alberich la responsabilitat de la secció «Art i matemàtiques» de la revista. En aquest número ens ha preparat un article molt interessant i ben documentat sobre la combinatòria a l'art del segle XX. D'altra banda, la segona incorporació és el Xavi Roca, matemàtic i professor de l'Institut Ramon Berenguer IV de Cambrils. En Xavi, de vegades diu d'ell mateix que es va equivocar de carrera i hauria d'haver estudiat literatura. Quan se li pregunta amb més insistència, rectifica i reconeix que la didàctica de les matemàtiques l'apassiona, i escriure és simplement una altra de les seves passions. En un intent de fusionar aquestes dues inquietuds, fa poc més d'un any ha iniciat un projecte que ha anomenat «Materatura», un espai web <https://sites.google.com/view/materatura/materatura?authuser=0>

on publica relats matemàtics: petites històries en què, amb un embolcall literari, apareixen diverses reflexions matemàtiques en clau sovint també de divulgació matemàtica. El relat que apareix a la secció «Cultura» és una mostra del seu treball.

D'aquest número de la *SCM/Notícies* voldria destacar dos articles que feia temps que volia que fossin escrits i publicats. El primer, signat pel Manel Sol, professor jubilat de secundària i president actual de la FEEMCAT, és un extens article en què s'expliquen les reformes educatives que s'han dut a terme a l'ensenyament de primària i secundària des de l'anomenada «lleï Villar Palasí» de l'any 1970 fins a l'actualitat i reflexiona sobre quin ha estat l'impacte de tots aquests canvis en l'ensenyament de les matemàtiques als instituts. Aquest article el trobareu a la secció «Contribucions». El segon article, i que en certa manera complementa l'anterior però en un format diferent, és el que podeu trobar a la secció «La pregunta del *Notícies*». En aquest article, sis professors de diferents universitats (Antoni Benseny, Josep Maria Brunat, Rosa Camps, Margarida Espona, Marta Peña i Jordi Saludes) han reflexionat, des de la seva experiència personal, sobre els canvis de contingut i de metodologia que s'han dut a terme durant aquests darrers vint-i-cinc anys en l'ensenyament universitari de les matemàtiques a Catalunya i, també, sobre quins han estat els motius i les conseqüències d'aquests canvis.

Amb el desig que aquest número de la *SCM/Notícies* arribi al més aviat possible a les vostres mans:

Bon i lliure 2019!



## La columna de l'EMS

Martí Lahoz

Universitat de Barcelona – Université Paris 7

Membre corresposnal EMS-SCM

En aquesta edició destaquem:

- **Reunió del Comitè Executiu**

El Comitè Executiu de l'EMS es va reunir del 9 a l'11 de novembre de 2018 a Barcelona.

- **Reunió del Consell de l'EMS**

El màxim òrgan de l'EMS, el Consell, reunit del 23 al 24 de juny de 2018 a Praga, va elegir Volker Mehrmann com a nou president de l'EMS per al període 2019–2022. Betül Tanbay va ser escollida com a nova vicepresidenta, i Jorge Buescu s'uneix al Comitè Executiu. El Consell va aprovar el pressupost de l'EMS i va prendre diverses decisions; en particular, va introduir un sistema d'afiliació vitalícia. [http://www.ems-ph.org/journals/show\\_pdf.php?issn=1027-488X&vol=9&iss=109&rank=1](http://www.ems-ph.org/journals/show_pdf.php?issn=1027-488X&vol=9&iss=109&rank=1)

- **L'assemblea general de la IMU**

D'acord amb la tradició, la IMU va tenir la seva reunió de més alt nivell abans de l'ICM2018. Entre les dues candidates restants per acollir l'ICM2022, els delegats van escollir Sant Petersburg. Carlos Kenig va ser elegit nou president de la IMU i Helge Holden continuarà com a secretari general.

- **Medalles Fields**

Continuant amb la tradició, els premis amb les medalles Fields van ser anunciats al començament de l'ICM. Peter Scholze i Alessio Figalli han permès mantenir la proporció 6 a 1: dels 70 guanyadors del premi de l'EMS fins ara, 12 han aconseguit guanyar la medalla Fields.

- **L'EMS sobre l'Open Access**

Els mes de juliol passat, l'EMS va reiterar la seva posició sobre l'Open Access: <http://euro-math-soc.eu/news/18/07/10/ems-open-access-update-july-2018>.

D'altra banda, la Comissió Europea ha anunciat el seu Pla S que faria que el programa

Gold Open Access fos obligatori *de facto* a partir del 2020 dins de la UE. L'anunci confirmava explícitament la participació de les grans editorials comercials a l'hora de formular aquest pla. A més a més, la Comissió Europea ha nomenat Elsevier responsable del seguiment del pla mitjançant l'Open Science Monitor. Des del punt de vista de l'EMS, això comportarà òbviament un conflicte d'interessos.

- **Premi Breakthrough 2019**

El professor Vincent Lafforgue, membre del CNRS i de l'Institut Fourier de la Université Grenoble Alpes, ha estat guardonat amb el premi Breakthrough 2019 (al millor avenç del 2019) «per les seves contribucions revolucionàries a diverses àrees de les matemàtiques, en particular al programa de Langlands en el cas de cossos de funcions».

- **ICIAM 2019**

El congrés internacional de matemàtica industrial i aplicada (ICIAM) se celebrarà a València del 15 al 19 de juliol de 2019.

Podeu trobar els terminis per a la presentació de minisimposis, presentacions, articles, pòsters i finançament en la pàgina web següent: <https://iciam2019.org/index.php/important>

El congrés també ha anunciat els premis Collatz (S. Mishra, ETH), Lagrange (G. Papanicolau, Stanford U.), Maxwell (C. Bardos, U. Paris Diderot), Pioneer (Y. Maday, Sorbonne U.) i Su Buchin (G. di Nunno, U. Oslo), que seran concedits durant la cerimònia d'inauguració.

- **Convocatòries**

Les convocatòries següents estan obertes:

- Convocatòria Marie Skłodowska-Curie per a xarxes de formació innovadores (H2020-MSCA-ITN-2019).



Termini: 15 de gener de 2019.  
<https://ec.europa.eu/research/participants/portal/desktop/en/opportunities/h2020/calls/h2020-msca-itn-2019.html>

- Convocatòria ERC Consolidator Grant (ERC-2019-COG).

Termini: 7 de febrer de 2019.  
<http://ec.europa.eu/research/participants/portal/desktop/en/opportunities/h2020/topics/erc-2019-cog.html>

- Convocatòria per a les nominacions als candidats al premi Felix Klein.

Termini: 31 de desembre de 2019.

- Convocatòria per a les nominacions als candidats als 10 premis de l'EMS.

Termini: 1 de novembre de 2019.

- Convocatòria per a les nominacions als candidats al premi Otto Neugebauer d'història de les matemàtiques.

Termini: 31 de desembre de 2019.

- Convocatòria Marie Skłodowska-Curie per al cofinançament de programes regionals, nacionals i internacionals (MSCA-COFUND-2019).

Termini: 26 de setembre de 2019.

<http://ec.europa.eu/research/participants/portal/desktop/en/opportunities/h2020/topics/msca-cofund-2019.html>

- **ERC Starting Grants** La convocatòria de les beques ERC Starting Grants 2019 es va tancar el 17 d'octubre passat. Aquest any l'ERC va rebre 3.106 sol·licituds, una lleugera davallada (al voltant del 2%) respecte del nombre de sol·licituds de l'anterior convocatòria.

El nombre més gran de sol·licituds va ser en el camp de la física i l'enginyeria (1363), seguida per les ciències de la vida (867), i les ciències socials i les humanitats (876). Gairebé el 39% de les propostes van ser presentades per dones, en comparació amb el 37% de l'any passat.

L'ERC ha començat l'avaluació de les propostes. Els projectes seleccionats seran anunciats a l'estiu del 2019.

- **Llista de conferències**

L'EMS manté la llista següent de conferències internacionals: <http://euro-math-soc.eu/event-list>

## Assemblea general de la IMU i el Congrés Internacional de Matemàtics ICM2018

Xavier Jarque  
President de la SCM

Soc a prop de la porta C65 de l'aeroport de Rio de Janeiro, 7 d'agost de 2018. Els lectors de la *Notícies/SCM* llegireu aquest article d'aquí a uns sis mesos més o menys; he mirat de tenir-vos informats dels esdeveniments més rellevants de la ICM de Rio de Janeiro a través del web de la societat i alguna piulada al Twitter que vaig fer gairebé en directe quan es van saber els noms dels guanyadors de la Medalla Fields. No sé pas si l'acabaré aquí a l'aeroport o si hauré de continuar a l'avió, o si hauré de treballar encara una mica quan sigui a casa, però penso que és millor que l'escrigui amb la memòria fresca ja que tinc la intenció (no completa; estic acabant el document a la terrassa de

casa... ) de començar les vacances tot just quan posi el peu en terres catalanes. Aquest ha estat un any intens i el proper semestre no sembla lleuger.

### Assemblea general de la IMU

Com a tots els ICM abans del congrés, i habitualment en una ciutat diferent de la que correspon al congrés la IMU (International Mathematical Union), celebra la seva assemblea general (així doncs, una GA cada quatre anys). En aquest cas, com que el congrés ha estat a Rio de Janeiro, la ciutat escollida per a la GA ha estat São Paulo.

Vaig aterrar a São Paulo el dissabte 28 de juliol al vespre. La GA va començar el diumenge, a les 8.15 del matí i va acabar el dilluns a les 19.00 hores. El dimarts 30, a les 6 del matí, vam agafar un autobús que ens va portar de São Paulo a Rio de Janeiro passant per Paratí, on vam parar a dinar. Paratí és un destí turístic de primer ordre dins del Brasil; un petit poblet que havia sigut de pescadors i que ara viu en exclusiva del turisme. Casualment, jo havia estat a Paratí 15 anys enrere amb la família i he pogut constatar un canvi important pel que fa a la capacitat turística i l'oferta de lleure durant aquests 15 anys. Continua sent un lloc «remot» però menys (fins i tot vaig trobar-me un noi, el Ramon, de Barcelona, que quan li vaig preguntar com havia anat a parar a Paratí em va contestar: «perquè soc al paradís»). Una de les activitats més boniques que s'hi pot fer és agafar un barquet i anar a una de les 160 illetes que es troben en un radi de pocs quilòmetres de la costa. Algunes són privades però també n'hi ha moltes a les quals es pot anar lliurement. En qualsevol cas, el viatge d'autobús d'unes 14 hores que vam fer per poder estar dues o tres hores a Paratí no crec que fos una bona decisió. La intenció, però, és el que compta i agraeixo a la Societat Brasileira de Matemàtiques (el seu president era el *chair* del comitè organitzador de la GA) i a la IMU tot l'esforç perquè la GA fos tan agradable, inclosa la visita a Paratí. Al voltant de les 9 del vespre del dimarts 31 ja era a l'habitació de l'hotel a RioCentro, on hauria de transcórrer el congrés (a uns 20 quilòmetres al sud de la ciutat de Rio de Janeiro). Al matí següent es faria la cerimònia d'inauguració del congrés, que començava a les 8.30 del matí (no sense que abans hagués tingut un ensurt de primer ordre com explicaré després).

Tornem, però, al diumenge 29 a les 8.30 per fer un repàs dels punts més importants que es van tractar a la GA. Potser és bo recordar, o informar pels que no ho sabeu, que la representació de la SCM a la IMU és via el CEMat (Consejo Español de Matemáticas), que és l'Organització Adherida de la delegació espanyola. En aquest, cas formàvem part de la delegació el president i la vicepresidenta de la RSME (Francisco Marcellán i Mercedes Siles, respectivament) el director del BCAM (Luis Vega), que de fet hi anava en representació

de SEMA, i jo mateix com a representant de la SCM.

La informació oficial de la GA la podeu trobar al web de la IMU. No faré un repàs exhaustiu i només esmentaré els punts que em van semblar més sorprenents o interessants. Primer de tot vam fer la fotografia de grup.



Sorprenent. El comitè executiu CE de la IMU havia decidit (aquesta no és una decisió de la GA, sinó prèvia a la reunió) que el premi Nevalinna, que es concedeix en un format molt semblant a les medalles Fields a un/a investigador/a en temes de computació matemàtica o complexitat, deixaria d'existir com a tal (recordem que Rolf Nevalinna va ser president de la IMU del 1959 al 1962). La raó que havia portat el CE a prendre aquesta decisió és que ha rebut moltes queixes d'alguns membres de la comunitat matemàtica que el premi porti el nom del professor Rolf Nevalinna, arran del paper que va tenir en la Segona Guerra Mundial en partits d'extrema dreta finlandesa propers al nazisme (he mirat d'obtenir més informació via internet i he trobat ben poca cosa). El premi estava finançat per la Universitat d'Hèlsinki (Finlàndia) de la qual Nevalinna havia estat rector. En tot cas, la decisió estava presa. La GA s'havia de pronunciar entre dues o tres opcions: (a) cancel·lar el premi sense més consideracions, (b) crear un premi que sigui continuació del Nevalinna. L'opció (b), al seu torn, admetia dues opcions: l'estructura del nou premi implicaria que els temes que corresponen al premi Nevalinna (computació matemàtica i complexitat) quedessin exclosos dels premis Medalla Fields, o no. La resolució de la GA va ser acceptar (b) i que el nou premi (per al qual s'haurà de buscar nom i finançament) deixés computació matemàtica i complexitat fora dels premis Medalla Fields.

Interessant. La IMU ha impulsat que l'ONU aprovi que el dia 3 de març sigui proclamat el Dia Internacional de les Matemàtiques. Si totes les gestions segueixen els passos previstos, el primer any que això passarà serà el 2020. La SCM ha donat suport a aquesta iniciativa i, per tant, haurem de reforçar les activitats que es fan a l'entorn d'aquesta data.

Sorprenent. En aquest cas hauríem de dir «sorpresa». Es fa públic (era secret) el Program Committee, que és el comitè que ha gestionat tot el programa científic de l'ICM2018. El seu president ha estat János Kollár de la Princeton University.

Interessant i sorprenent. Un dels moments àlgids del primer dia (ja som a la tarda de diumenge) va ser la votació per decidir el proper organitzador de l'ICM2022. Dues candidatures: París i Sant Petersburg. No era conscient que el comitè de visites a les seus, format per Hyungju Park (Chair), Helge Holden secretari general de la IMU i Christiane Rousseau, havien resolt recomanar Sant Petersburg i van exposar-ne les raons (una llista de «pros» i «cons», en paraules del secretari general. Malgrat que no queda clar que hi hagi cap mandat per part dels estatuts de la IMU que el comitè hagi de fer una ordenació de les candidatures, sembla que és tradició fer-ho (alguns delegats sèniors em van explicar que almenys en una altra ocasió hi va haver tres candidatures no ordenades...). Les dues candidatures van tenir 11 minuts per defensar-se. En el torn de preguntes, potser quatre o cinc intervencions, majoritàriament es va qüestionar a la proposta russa temes relacionats amb visat i drets humans (especialment pel que fa al col·lectiu homosexual). La nostra delegació va decidir votar individualment. El resultat de la votació va ser clarament favorable a Sant Petersburg: 85 a 65 aproximadament. No cal dir que va implicar «somriures i llàgrimes». Tota la pressió és ara per a Stanislav Smirnov (Medalla Fields 2010), que serà el president del comitè organitzador.

Sorprenent. El pressupost de la IMU és d'1 milió d'euros. D'aquest milió, bàsicament la meitat prové de les quotes que paguem les organitzacions adherides (per exemple, el CEMat, que pertany al Grup IV, paga uns 12.000 euros, dels quals 2.000 la SCM) i l'altra meitat la paga Alemanya (un terç Berlín, un terç el govern de la regió i un altre terç el WIAS,

és a dir, el Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics). Aquest fet s'explica perquè la secretaria de la IMU està allotjada al WIAS i ells assumeixen les despeses que això implica, tant materials com de personal. El fet és que aquest acord de col·laboració entre la IMU i el WIAS era temporal i en la GA de São Paulo vam aprovar convertir-lo en un acord permanent.

Parèntesi. A les set de la tarda, uns busos ens van portar fins a un local on vam fer el sopar social. Música brasilera en directe. Molt agradable.

Interessant. Dilluns al matí va començar amb la presentació i votació dels propers membres dels comitès de la IMU. Potser el més rellevant era el cas del seu president, amb un únic candidat: Carlos E. Kenig, de la Universitat de Chicago. En Carlos és argentí d'origen però ha fet tota la seva carrera professional als EUA. La seva especialitat són les EDP.

Dues consideracions. Una. Carlos E. Kenig serà el nou president de la IMU substituint Shigefumi Mori, a partir de l'1 de gener de 2019. Dues. El nou CE de la IMU, incloent-hi el comitè ampliat (un total de deu persones), tindrà només una dona. Potser que ens ho fem mirar.

Interessant. Cada país que participa en la IMU paga una quota en funció del «grup» a què pertany. El grup es defineix pel nombre de vots de la delegació i va de 0 vots (associat) fins a 5 vots (Grup V). Com dèiem abans, Espanya, representada pel CEMat, pertany al grup IV. En la darrera part de la reunió es felicita els països que han decidit «augmentar» la seva participació, ja sigui incorporant-se a la IMU com a associats (per exemple, el Kirguizistan) o bé aquells que fan el salt a un grup superior (per exemple, Portugal passa de Grup II a Grup III, o el Brasil que passa de Grup IV a Grup V). Però també es parla d'aquells països que fa un temps que no paguen els seus drets de vot (va ser el cas d'Espanya en l'ICM2014, que feia 3 anys que no pagava la quota). La discussió en aquests casos és si s'apliquen els estatuts de forma més restrictiva (quatre anys sense pagar implica l'expulsió) o si es busquen mesures imaginatives o particulars (per exemple, el cas de l'Iran o Venèçuela, en què sembla que la raó de no pagar té fonaments polítics). La decisió de la GA va ser no expulsar i intentar trobar una solució.

Sorprenent. La darrera discussió que semblava inofensiva va resultar un fracàs. La defensava Wendelin Werner (membre del *comitè-at-large* i medalla Fields). La idea que es proposava era la creació de *regions* com a potencials nous membres de la IMU. És a dir, permetre que una organització adherida en comptes de representar un país (com el CEMat a Espanya, posem per cas), ho faci d'una regió, definida com una unió de països, cap dels quals sigui membre de la IMU i que tingui una proximitat geogràfica. I la cosa es va anar enredant. Què vol dir exactament *país*? Qui pot ser una regió (va sortir explícitament el nom de Catalunya)? Per què s'obre aquesta porta i no es potencia que els països que vulguin entrin a la IMU com a membres associats (sense pagar... i sense dret a vot, és clar)? Després de una hora llarga de discussió es va decidir no aprovar la iniciativa. *C'est la vie!*

Sopar i a dormir que l'endemà a les 6 calia pujar al bus per anar a Paratí i Rio de Janeiro.

## ICM2018

Com us deia, la sessió d'obertura del congrés no havia estat exempta d'un episodi que hauria pogut ser molt més greu. La nit del diumenge al dilluns (48 hores abans de l'obertura del congrés) una joguina (un globus amb una espelma a dins que els nens fan volar al capvespre) va caure al sostre del pavelló on s'havia de fer la sessió d'obertura del congrés i va provocar un foc de grans dimensions. Immediatament, el president del comitè organitzador Marcelo Viana, que era a la GA de São Paulo, va volar a Rio de Janeiro. El pavelló havia quedat inservible i no va ser fins dilluns al migdia que s'hi va poder entrar. La major part del material s'havia salvat i en 48 hores sense descans van traslladar l'interior del pavelló a un recinte contigu (són pavellons on hi caben unes 2.500 persones...). Com deia en Marcelo, sempre tranquil, calia passar una prova per saber que s'estava fent bé la feina i caram si la vam passar.

A quarts de nou del dimecres començava la sessió inaugural. En Marcelo va fer un discurs d'obertura recordant l'esforç titànic d'una generació de matemàtics brasilers per convertir el Brasil en una primera potència mundial en matemàtiques. I va particularitzar aquest esforç en la persona de Jacob Palis (president de la

IMU del 1999 al 2002) i a l'institut IMPA. Si no hi ha cap sorpresa, Marcelo Viana farà un curs al CRM sobre teoria ergòdica i sistemes dinàmics. Sempre és un plaer sentir-lo parlar de matemàtiques; pel que sap i per la capacitat comunicativa que té.

Després d'una actuació musical amb aires de samba brasilera, es va passar a la lectura dels premis (Nevalinna Prize, Gauss Prize, Chern Medal, Leelavati Prize i Fields Medals). Us ben asseguro que és emocionant veure aquest moment en directe. Hi ha tensió i l'escenografia és preciosa.

Primer s'enuncien els premis següents:

- Rolf Nevalinna Prize: Constantinos Daskalakis (MIT, USA), per les seves aportacions a la complexitat del problema de trobar equilibris (de Nash) en diversos aspectes de la teoria econòmica (mercats, subhastes, etcètera).
- Carl Friedrich Gauss Prize: David L. Donoho (Universitat de Stanford) per les seves aportacions a la teoria del senyal via les eines de l'anàlisi computacional i estadística.
- Chern Medal Award: Masaki Kashiwara (Universitat de Kyoto), pels seus treballs de més de 50 anys en anàlisi algebraica i teoria de representacions.
- Leelavati Prize: Ali Nesin (Turquia), pel projecte anomenat *Petit poble matemàtic* («Mathematical Village») dedicat a l'ensenyament i disseminació de les matemàtiques des d'una visió lliure, en un context social i polític complicat com el que es viu a la Turquia actual.

Finalment, els quatre medalla Fields (per ordre estrictament alfabètic).

- Caucher Birkar (Cambridge University, UK), per la prova de l'acotació de varietats de Fano i per les seves contribucions al programa de model minimal (relatiu a la classificació de varietats algebraiques).
- Alessio Figalli (Zurich University, Suïssa), per les seves contribucions a la teoria del transport òptim i les aplicacions a les EDP, la geometria mètrica i la probabilitat.



- Peter Scholze (Bonn University, Alemanya) per la introducció dels espais perfectoides en l'estudi de la geometria algebraica aritmètica sobre camps  $p$ -àdics, i les seves aplicacions a la teoria de representacions de Galois. També pel desenvolupament de les noves teories cohomològiques.
- Akshay Venkatesh (EUA) per la seva síntesi de la teoria analítica de nombres, dinàmica homogènia, topologia i teoria de la representació. Aquests avenços han permès tancar problemes ben antics, com el de l'equidistribució d'objectes aritmètics.

Com us deia, quan es fan públics els premis és un moment potent. Em va fer molta il·lusió ser-hi. Voldria, doncs, fer unes consideracions, algunes de caire més seriós i d'altres més informal o anecdòtic.



Caucher Birkar passarà a la història dels ICM per dos motius ben diferents. El primer, és clar, més important, és el camí que ha hagut de recórrer fins a l'obtenció de la medalla. En Caucher va arribar al Regne Unit com a immigrant il·legal provinent de la guerra a l'Iraq en la seva condició de kurd. I va voler reivindicar explícitament el seu origen kurd i el dolor que ha de patir la seva gent i la seva nació per poder ser lliures. Ell mateix va viure la infància sota el soroll de les bombes. Malgrat això, el seu germà gran el va educar en les matemàtiques i la seva gran destresa li va permetre, un cop al Regne Unit, fer el camí que l'ha portat a rebre la màxima distinció de la comunitat matemàtica. El segon és més aviat anecdòtic: també serà l'únic matemàtic a rebre dues medalles Fields (i en un mateix ICM!), cosa que és impossible per estatuts de la IMU. M'explico. Minuts després que la sessió

d'obertura del congrés es donés per acabada amb les paraules del ministre d'Educació del Brasil, molta gent, especialment joves brasilers que eren presents a la sessió, es van acostar a fer-se una fotografia amb les seves estrelles. Circumstància que van aprofitar un parell de persones que s'havien colat a l'acte per robar-li la medalla. Tot i que les càmeres de seguretat van poder gravar les cares dels lladres i es van difondre les imatges a les televisions de tot el país encara, que jo sàpiga, no els han trobat; i a la medalla tampoc. L'organització va decidir celebrar una petita cerimònia per poder-li donar una còpia exacta de la medalla. En el petit discurs que en Caucher va fer, va donar les gràcies a l'organització per haver fet aquest esforç i, el més interessant, va enviar aquest missatge: «En un primer moment vaig quedar molt dolgut pel que m'havia passat, però al cap de poques hores em vaig refer i vaig comprovar que tampoc no era tan important; si al llarg de la meua vida no hagués tingut aquesta fortalesa no hagués tirat endavant, ja que us puc assegurar que he viscut experiències molt i molt pitjors».

Quan es fa públic el nom de cada guanyador del premi, es projecta un vídeo breu (<https://www.mathunion.org/imu-awards/fields-medal/fields-medals-2018>) d'uns 2 o 3 minuts, en què cadascun dels medallistes explica la seva història i situació present, i la seva relació amb les matemàtiques. Són molt interessants. És una iniciativa de la Fundació Simons.

El meu hotel era justament al costat dels pavellons on es van lliurar els premis. Just quan sortia mateix de l'hotel dimecres al matí vaig coincidir amb un Peter Scholze vestit de vint-i-un botons; no calia ser Sherlock Holmes per saber que seria un dels premiats, i així ho vaig fer notar en un tuit. També és cert que el seu nom apareixia a totes les previsions.

Cadascun dels medallistes va fer una xerrada plenària davant d'una audiència molt nombrosa. Vaig anar a les quatre. Les exposicions van ser de tipus molt diferents; en els dos extrems podríem situar la xerrada de Peter Scholze, molt tècnica i sense concessions, i la d'Alessio Figalli, pensada per a una audiència general, sense detalls. Entremig, en el sentit metodològic, les dues ponències d'Akshay

Venkatesh i de Caucher Birkar que malgrat tractar temes força tècnics volien arribar a una audiència general.

En qualsevol cas, en termes generals, la matemàtica catalana té motius per estar contenta. A tall d'exemple, deixeu-me posar alguns casos.

Mariana Bosch va ser conferenciant convidada a la secció d'Educació Matemàtica i popularització de les matemàtiques. La xerrada «Study and research paths: A model for inquiry» va ser l'única conferència invitada d'una membre de la SCM.

En dues de les quatre xerrades dels medalla Fields, els ponents van fer referència a treballs coautoritzats amb matemàtics catalans. Més concretament, Akshay Venkatesh va referenciar Víctor Rotger i Alessio Figalli va explicar parcialment els treballs que està fent amb Xavier Ros-Oton i Joaquim Serra.

Finalment, també vull destacar que Marta Sanz-Solé va pronunciar la conferència de la London Mathematical Society, cosa que mostra la seva rellevància matemàtica i el paper destacat que té en la política científica europea.

Estem, doncs, d'enhorabona.

## Trobada del Comitè Executiu de l'EMS a Barcelona

Xavier Jarque  
President de la SCM

Els dies 9, 10 i 11 de novembre passat el Comitè Executiu de la Societat Europea de Matemàtiques (EMS) es va reunir a la seu de l'Institut d'Estudis Catalans (IEC). La Societat Catalana de Matemàtiques, que com sabeu és membre de ple dret de l'EMS, va fer d'amfitrió de la trobada. De fet Catalunya, i més concretament l'IEC, ha estat força cops seu de diferents comissions, comitès i trobades de l'EMS durant els darrers anys, en què ha destacat, òbviament, l'organització del Tercer Congrés Europeu de Matemàtiques l'any 2000.



Aquesta reunió del Comitè Executiu tenia un valor singular ja que ha estat la darrera reunió presidida per l'actual president de l'EMS, Pavel Exner, que deixarà (pel lector ha deixat) la presidència de l'EMS a principis de l'any

2019. En la darrera reunió de l'Assemblea de l'EMS, que va tenir lloc a Praga el mes de juny del 2018, es va nomenar nou president de l'EMS el professor Volker Mehrmann (TU, Berlín). Deixeu-me que també digui, a títol personal, que per a mi ha estat una visita singular perquè serà l'últim cop que tingui l'oportunitat de col·laborar amb l'EMS com a president de la SCM.



En l'agenda, entenc (jo no formo part del comitè) que parlarien de temes candents de l'EMS, com són la nova localització de l'editorial de l'EMS a un país de la UE (molt probablement Alemanya), l'organització del proper Congrés Europeu de Matemàtiques a Portoroz (Eslovènia), la decisió sobre les peticions de les activitats per al 2019 (escoles-EMS, conferencians-EMS, etcètera), qüestions



de comunicació de l'EMS i temes de tresoreria.

Pel que fa a l'activitat social de la trobada, la SCM, com a societat amfitriona, va convidar a un sopar tota la delegació el divendres a la nit, mentre que l'EMS va oferir un sopar a

tots els membres de la delegació al qual també vam assistir els directors de l'IUMB (Joaquim Ortega-Cerdà), del CRM (Lluís Alsedà), la directora de la BGSMATH (Marta Sanz-Solé) i jo mateix.

## Noticiari

### Les universitats informen

#### Activitats divulgatives del Departament de Matemàtiques de la UAB

Armengol Gasull

Coordinador de Relacions amb Secundària  
Departament de Matemàtiques de la UAB


Com des de fa uns quants anys, a finals del curs 2017–2018 el nostre departament va organitzar una estada de tres setmanes per a alumnes de batxillerat, dins del programa Argó. Els alumnes participants van seguir quatre blocs d'activitats coordinats pels professors Natàlia Castellana, Jaume Coll, Juan J. Donaire, Jaume Llibre. Aquestes activitats es van centrar en els quatre temes següents:

- Les matemàtiques de les formes que ens envolten sense regla ni compàs: grafs i connexions en el dia a dia; nusos, cintes i altres objectes matemàtics amb propietats excepcionals.
- L'origami dels mosaics de l'Alhambra.
- Paradoxes probabilístiques.
- Tres qüestions matemàtiques: la fórmula d'Euler i els cinc poliedres regulars, el teorema de Pick i una breu introducció a l'astronomia.

A més, durant el curs passat es van dissenyar una nova sèrie de quatre punts de llibres matemàtics, que portaven com a títol: biologia matemàtica, combinatòria, sistemes de numeració i el teorema de Pitàgores. A la figura podeu veure una cara del primer. Aquest tema en particular va ser triat aprofitant que el 2018 ha estat declarat per l'European Mathematical Society i l'European Society for Mathematical

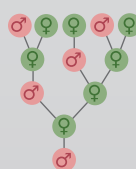
### UAB biologia matemàtica

#### Els avantpassats d'un abellot



$a_n =$  avantpassats en la generació  $n$

$a_0 = a_1 = 1$   
 $a_2 = 2$   
 $a_3 = 3$   
 $a_4 = 5$   
 $a_{n-1}$  enèsim nombre de Fibonacci

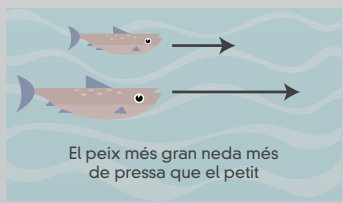


#### La velocitat òptima de natació

$f$  energia consumida,  $v$  velocitat,  
 $w$  pes,  $A$  àrea de la secció,  $L$  longitudud

$$f(v) = \frac{C_1 w}{v} + C_2 A v^2$$
$$\Rightarrow v_{opt} = \sqrt[3]{\frac{C_1 w}{2 C_2 A}}$$

$w \propto L^3, A \propto L^2 \Rightarrow v_{opt} \propto \sqrt[3]{L}$



El peix més gran neda més de pressa que el petit

#### Equilibri de Hardy-Weinberg

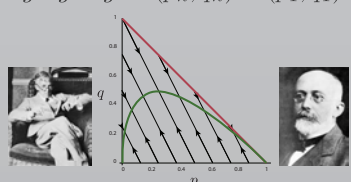
Freqüència inicial del genotip  $AA$ :  $p_0$   
Freqüència inicial del genotip  $Aa$ :  $q_0$

$p_0 + q_0 \leq 1$  (Freqüència d' $aa$ :  $1 - p_0 - q_0$ )

Freqüències generacions següents:

$$(p_1, q_1) = g(p_0, q_0) = \left( \left( p_0 + \frac{q_0}{2} \right)^2, 2 \left( p_0 + \frac{q_0}{2} \right) \left( 1 - p_0 - \frac{q_0}{2} \right) \right)$$

$g \circ g = g \Rightarrow (p_n, q_n) = (p_1, q_1)$



and Theoretical Biology, com a Any Internacional de la Biologia Matemàtica. Els autors respectius dels quatre punts van ser: Àngel Calsina i Sílvia Cuadrado; Odí Soler; Armengol Gasull i Gregori Guasp, i Joan Josep Carmona.

Durant el curs actual ja s'estan fent les sessions de preparació per a les olimpíades matemàtiques i per les proves Cangur a càrrec dels professors Dolors Herbera, Joan Claramunt i Odí Soler, i Josep Gascón, respectivament. També està previst, molt probablement durant una tarda de l'abril o el maig de l'any que ve, fer la X jornada «Les matemàtiques entre la secundària i la universitat». Enguany, el tema central seran les matemàtiques a les ciències socials.

Seguint amb la tradició començada el curs 2003–2004, continuem organitzant els Dissabtes de les Matemàtiques. Els professors responsables durant aquest curs seran Bartomeu Coll (Universitat de les Illes Balears), i Rosario Delgado, Gregori Guasp i Joaquim Roé, tots tres membres del nostre departament. Reserveu els matins dels dissabtes dels dies 9, 16 i 30 de març i 6 d'abril. Podreu trobar més informació, i en particular com formalitzar la vostra inscripció (gratuïta), a la pàgina web del departament: <http://www.uab.cat/web/divulgacio-1194422462322.html>. Com és tradició, el primer dels dissabtes coincidirà amb l'últim Dissabte de la Física.

## Activitats de la Facultat de Matemàtiques de la UB el curs 2017–2018

Antoni Benseny i Xavier Massaneda  
Coordinadors d'activitats per a secundària  
Facultat de Matemàtiques, UB

El curs 2018–2019 va començar, com és habitual, amb les jornades introductòries per als nous estudiants de grau, que tingueren lloc els dies 7 i 8 de setembre.

Seguint amb les activitats habituals de l'inici de curs, els dies 26 i 27 de setembre es va celebrar la Install Party 2018, una jornada d'introducció al món del programari lliure totalment organitzada per estudiants de tercer i quart curs i adreçada als estudiants de primer. Aquest és ja el novè any consecutiu que es fa.

L'acte d'obertura del curs acadèmic tingué lloc el dia 3 d'octubre. El Dr. Jordi Marzo va impartir la lliçó inaugural titulada «Punts d'energia mínima i empaquetaments d'esferes». En el transcurs de l'acte es lliurà, per primera vegada, el premi Collectanea Mathematica Best Paper Award, atorgat al professor Kangwei Li, de la Universitat d'Hèlsinki, pel seu article «Two weight inequalities for bilinear forms», publicat en el volum 68 de la nostra revista.

Durant el mateix acte es va lliurar el premi August Palanques al millor expedient acadèmic del Grau de Matemàtiques del curs 2016–2017. El guardonat fou Joan Bruguera Micó.

La Facultat de Matemàtiques i Informàtica, amb la col·laboració del Vicerectorat d'Es-

tudiants i Política Lingüística i dels Serveis Lingüístics, ha instaurat el «Premi a la comunicació i a la qualitat lingüística dels treballs finals dels graus de Matemàtiques i Enginyeria Informàtica». El premi pretén fomentar la capacitat de comunicació a un públic de nivell acadèmic, però no especialitzat, dels resultats dels treballs finals dels graus de Matemàtiques i d'Enginyeria Informàtica, així com la qualitat de la seva redacció.

En un altre àmbit, la Facultat de Matemàtiques i Informàtica organitzà una exposició de pintura de l'artista Roger Solernou, exalumne de la nostra facultat. L'exposició portà per títol «Les matemàtiques com a motor poètic» i estigué instal·lada del 10 al 24 d'octubre al primer pis del Claustre de Ciències.

Coincidint amb l'últim dia de l'exposició, el dia 24 d'octubre l'associació Hacking Lliure de la facultat va donar el tret de sortida a aquest curs amb dues xerrades exprés, amb els títols «Què és un virus?» i «Què és un *blockchain*?».

Per primera vegada, la Facultat de Física i la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona van organitzar un *speed networking* entre alumnes i empreses. La tècnica de l'*speed networking* cada cop s'uti-

litzza més en entorns empresarials, ja que facilita un entorn de coneixement mutu entre empreses i estudiants. La sessió va tenir lloc el dia 18 d'octubre, i per preparar-la el Servei d'Atenció a l'Estudiant de la Universitat de Barcelona oferí assessorament als alumnes sobre com participar en aquesta activitat de *networking* professional, durant el qual van aprendre a presentar-se de forma ràpida i atractiva.

El divendres 30 de novembre el Grup Cúbic de Didàctica de les Matemàtiques de la Facultat va organitzar la 2a Jornada de Didàctica de les Matemàtiques. La jornada, titulada «Una mirada matemàtica a l'obra de Josep Estalella i Graells», es completà amb una exposició de llibres i una mostra de materials de Josep Estalella i Graells i de l'Institut Escola.

Enguany seguim reforçant el suport acadèmic i econòmic a la presència d'alumnes de la nostra facultat a diverses competicions matemàtiques. El dia 14 de novembre al migdia va tenir lloc el Torneig de Tardor, destinat a alumnes de primer i segon any, i el novembre es va iniciar també el Tauler de Problemes. Hem seguit promovent la participació a la XXI Olimpíada Iberoamericana de Matemàtica Universitària. Per a la primavera hi ha previstes la IV Competició Universitària de Matemàtiques Lluís Santaló, la setena Competència Interuniversitària Matemàtica Argentina i la 26th International Mathematics Competition for University Students.

### Activitats per a estudiants i professors de secundària

La facultat posa especial èmfasi a diverses activitats de divulgació científica destinades, principalment, a l'alumnat d'ensenyament secundari. Aquestes activitats es complementen amb d'altres activitats d'orientació científica o professional adreçades a l'alumnat de la facultat. Les detallem tot seguit.

- *Xerrades taller.* Els dies 14 i 21 de novembre de 2018 la Dra. Anna Miriam Benini presentà la xerrada-taller titulada «Fractals». A la xerrada es van explicar formes fractals senzilles que es poden construir amb eines matemàtiques, i es van comparar amb les formes fractals de la natura que ens envolta, amb la seva bellesa i la seva complexitat. Això ajudà a entendre per què han tingut

tant d'èxit en l'evolució i per què s'utilitzen tant al món gràfic digital actual.



La segona xerrada-taller del curs present tingué lloc els dies 16 i 23 de gener, i fou a càrrec de la Dra. Mireia Ribera. La xerrada, titulada «La informàtica per a les persones: aprendre com usen l'ordinador persones cegues o amb discapacitats motrius» va fer una exposició breu de les possibilitats que ofereix la informàtica per a les persones amb discapacitats. Es va fer una demostració de l'accés a pàgines web i a un processador de text per part d'una persona amb discapacitat. Finalment, els assistents van poder experimentar ells mateixos l'ús de l'ordinador simulant, amb tecnologies d'assistència, alguna discapacitat.

- *Matefest-Infofest.* Aquesta jornada lúdica se celebrarà aquest curs el dia 11 d'abril. Amb aquesta festa, organitzada enterament pels estudiants de la facultat, pretenem presentar a la societat una imatge positiva de les matemàtiques i la informàtica. Amb aquesta finalitat volem captar l'atenció i la curiositat

no només dels alumnes de secundària, que són convidats a través dels seus centres educatius, sinó també de qualsevol persona que hi estigui interessada.

- *Activitats optatives del programa CTM.* Dins del marc del programa del Departament d'Ensenyament per a la Formació Científica, Tecnològica i Matemàtica del professorat de secundària oferim dues activitats optatives: una sessió sobre ciència de dades i Big Data, a càrrec del Dr. Lluís Garrido, i una altra a càrrec del Dr. Arturo Vieiro, titulada «Viatjant per l'espai».
- *Suport a treballs de recerca en matemàtiques.* L'objectiu d'aquest programa, iniciat fa ja onze anys, és oferir suport des de la facultat tant al professorat tutor interessat a dirigir els treballs com a l'alumnat que els porta a terme.
- *Preparació de l'Olimpíada Matemàtica.* Per novè any consecutiu, la Facultat de Matemàtiques de la UB ofereix unes sessions de preparació de resolució de problemes per a les proves de l'Olimpíada Matemàtica. Aquestes sessions, coordinades pel Dr. Jordi Marzo, van adreçades a tots els estudiants interessats a participar en la fase catalana de l'Olimpíada Matemàtica.
- *Participació al programa Escolab.* Per quart any consecutiu la nostra facultat col·labora en el programa Escolab, creat per l'Ajuntament de Barcelona i destinat a acostar el món de la recerca als estudiants de secundària. Les activitats de l'Escolab consisteixen en tallers o visites que permeten veure la gran diversitat de laboratoris que existeixen avui i entrar en contacte directe amb els seus equips i les seves línies de recerca. La nostra facultat ha ofert tres activitats: « $1+1 > 2$ : programant formigues», a càrrec de la Dra. Maite López, «Amuntegant pilotes», a càrrec de Joaquim Ortega-Cerdà i «Sistemes de recomanació i la seva integració en interfícies 2D i 3D», a càrrec de les doctores Inma Rodríguez i Maria Salamó.
- *Participació al programa Bojos per les Matemàtiques.* Dins el marc del programa Bojos per la Ciència creat per la Fundació La Pedrera, la FEEMCAT i la SCM ha renovat aquesta proposta conjunta iniciada l'any 2015, adreçada als estudiants del primer any de batxillerat de la modalitat de Ciències i Tecnologia. El programa Bojos per les Matemàtiques té per objectiu bàsic fomentar la vocació científica d'aquests joves i, en especial, el seu entusiasme per les matemàtiques. Cinc de les sessions d'aquest programa s'han dut a terme a la UB i, majoritàriament, a càrrec de professorat de la UB.

Trobareu informació sobre totes aquestes activitats, la forma de participar-hi i els terminis per prendre-hi part a la pàgina de la facultat a <http://mat.ub.edu/matapps/activitats/futurs-estudiants/>.

## Activitats de primavera de la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la UPC

Jaume Soler

Vicedegà de Relacions Internacionals i Promoció de l'FME

### Vida acadèmica

El curs 2018-2019 de la Facultat de Matemàtiques i Estadística (FME) de la UPC està dedicat a la figura de Sofia Kovalevskaya. Igual que en anys anteriors, la Biblioteca de l'FME organitza, en col·laboració amb l'assignatura Història de la Matemàtica, el Concurs Kovalevskaya, amb preguntes sobre la seva vida i obra.

La conferència inaugural del curs va ser a càrrec de Marta Macho Stadler, professora de la Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea. La professora Macho és molt activa en el camp de la divulgació científica i participa en nombroses activitats en universitats, institucions científiques, centres culturals i d'ensenyament. Ha rebut diversos premis per la seva activitat de divulgació i de visibilització de les aportacions de les dones científiques no

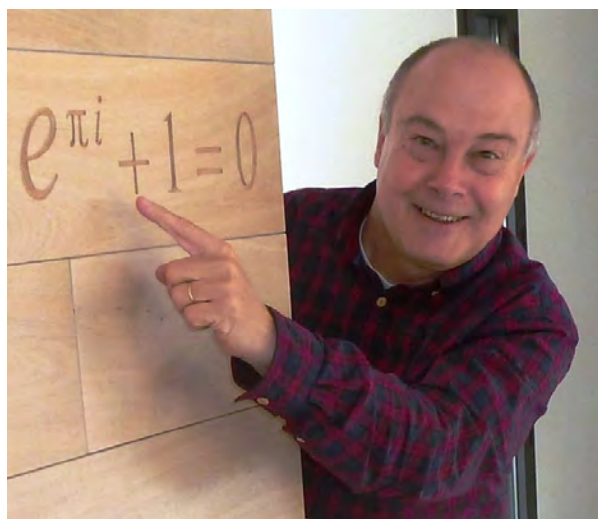


tan sols al món acadèmic, sinó també al progrés social.

La seva conferència «Recordando a Sofia Kovalevskaya» va ser un recorregut per cites, extractes de cartes i records de persones (matemàtics, escriptors i escriptores, gent del món de la ciència, familiars) que la van conèixer. En aquest sentit, va ser una aproximació poc convencional, però magistral, a la vida i obra de Sofia Kovalevskaya.

En el marc del Col·loqui FME-UPC, el mes de novembre es va pronunciar la conferència «Network Geometry», a càrrec de la professora M. Ángeles Serrano (UB-ICREA). La professora Serrano ha treballat com a investigadora a Indiana University, a l'École Polytechnique Fédérale de Lausana i al Instituto de Física Interdisciplinar y Sistemas Complejos (IFISC), de titularitat compartida entre la Universitat de les Illes Balears i el Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

Les xarxes complexes estan canviant la manera com modelem els sistemes complexos i predim el seu comportament. Els sistemes complexos tenen unes propietats comunes i poden mostrar respostes inesperades i esdeveniments crítics. En la seva ponència, la professora Serrano va explicar que moltes d'aquestes propietats es poden explicar a partir del descobriment que la geometria latent de moltes xarxes complexes és hiperbòlica i prové d'una distància entre nodes que combina les dimensions de popularitat i similitud.



Al mateix novembre, el professor Anton Aubanell va oferir la conferència «Un passeig per l'atzar i les formes», organitzada per la

Societat Catalana d'Estadística. El professor Aubanell és professor jubilat de secundària i de Didàctica de les Matemàtiques a la Universitat de Barcelona i també membre fundador del Museu de Matemàtiques de Catalunya. La seva xerrada va ser un recorregut pels camins que enllacen la probabilitat amb la geometria, amb referències a Lluís A. Santaló i amb un conjunt d'experiències concretes aplicables a l'aula de secundària.

Cal esmentar, també, entre les activitats del novembre l'acte de reconeixement al professor Pere Pascual pel premi UPC a la Qualitat en la Docència Universitària, concedit pel Consell Social de la UPC en la seva 21a edició.



A finals de desembre va tenir lloc l'acte de lliurament de diplomes a tot l'alumnat de l'FME que ha acabat els estudis de grau, màster o doctorat durant el curs 2017–2018. Els padrins d'aquesta promoció van ser el professor Xavier Cabré per als estudis de Matemàtiques i el professor Pedro Delicado per als d'Estadística. En total es van lliurar 48 diplomes del Grau en Matemàtiques (GM), 38 del Grau en Estadística (GE) UB-UPC, 18 del Master in Applied Mathematics and Mathematical Engineering (MAMME), 40 del Màster en Estadística i Investigació Operativa (MESIO) UPC-UB i 10 del programa de Doctorat en Matemàtica Aplicada i Estadística.

En la mateixa sessió es van lliurar els premis Accenture als millors expedients acadèmics del GM, del GE UB-UPC i del MESIO UPC-UB, així com el premi que atorga la Fundació CELLEX al millor expedient del MAMME.

D'altra banda, esmentem la renovació de la Junta de Facultat i la visita de la Comissió d'Avaluació Externa com a final del procés d'acreditació dels programes de doctorat en matemàtiques i en estadística.

## FME i sortides professionals

Des de fa temps l'FME organitza, cap a finals de curs, el Fòrum FME-Empresa per posar en contacte empreses amb estudiants de la facultat. El primer quadrimestre del curs actual es va fer una sessió especial amb l'empresa McKinsey, especialment per a estudiants dels darrers cursos i de màster.

També cal destacar la visita d'una delegació de l'Illinois Institute of Technology (IIT) que va presentar els màsters que s'hi ofereixen i la possibilitat de continuar amb estudis de doctorat a l'IIT.

## Activitats relacionades amb la docència

El 10 d'abril d'enguany van començar les activitats del seminari «Contextualització de les Matemàtiques a les carreres tecnològiques de la UPC». Com a continuació de les xerrades fetes el curs passat s'han dut a terme quatre sessions més: «Com les eines matemàtiques ajuden a fabricar peces. Casos pràctics», a càrrec d'Antonio Travieso, del Departament d'Enginyeria Mecànica; «Una proposta per a l'ensenyament de les matemàtiques a enginyeria informàtica», a càrrec de Joan Vicenç Gómez, del Departament de Matemàtiques, i «Aplicacions matemàtiques a l'elasticitat i resistència de materials», de M. Casafont, M. Ferrer i M. Pastor, del Departament de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria. La quarta sessió del quadrimestre i novena del seminari, considerada la sessió inaugural per al curs 2018-2019, va ser a càrrec de Guillermo Lusa, amb el títol «Una relació històricament problemàtica: las matemáticas en las ingenierías».

A mitjan novembre, l'FME va acollir la XXI Jornada Didàctica ABEAM, amb sessions plenàries i un grapat de sessions paral·leles i tallers per a tots els nivells de secundària i primària.

## Estudiants

Cada any, el grup de teatre grup Fem Teatre FME ofereix alguna representació. Enguany

els estudiants van presentar, just abans de les vacances, l'espectacle *Expo Cultural Nadal 2018*, una estona intensa de bones interpretacions teatrals i musicals, demostració rigorosa que a l'FME no només hi ha talent matemàtic. Altres actes organitzats pels estudiants han estat el tradicional Concurs de Trivial i la Xocolatada Solidària.



## Activitats relacionades amb secundària i competicions

Des del començament del curs actual s'han desenvolupat les activitats de preparació per a les olimpíades matemàtiques i per a la prova Cangur, els tallers per a secundària i batxillerat que ofereix l'FME i les activitats que acull els dissabtes: Anem x + Matemàtiques i el projecte Estalmat-Catalunya. El mes d'octubre va tenir lloc a l'FME l'acte d'inauguració de l'Estalmat 18/19.

Una altra activitat en la qual col·labora l'FME és el programa Bojos per les Matemàtiques. El primer quadrimestre del curs actual va acollir, al llarg del mes d'octubre, les proves de selecció per al programa 2019 i, a finals de novembre, l'acte de cloenda de l'edició 2018.

Les sessions que componen aquest programa estan repartides entre la UPC, la UAB i la UB, i hi col·laboren professors de les tres universitats i també professors de secundària.

Per acabar, recodarem que durant el mes d'octubre es va disputar la final del concurs de programació de la UPC, després de la semifinal que es va celebrar el mes de juny passat.



## Activitat del MMACA a la Bisbal d'Empordà

Francesc Massich

Museu de Matemàtiques de Catalunya

Poc devien pensar els bisbes que eren rebuts a la sala capitular del Castell Palau de la Bisbal el segle XII que entre les mateixes parets on ells feien reunions amb els senyors feudals més importants del Comtat de Cruïlles, al cap d'uns segles s'hi acolliria una exposició relacionada amb les matemàtiques.



L'exposició «Experiències matemàtiques, prohibit no tocar!» va ocupar el pis noble del Castell Palau el 2018, des del 12 d'abril fins al 9 de juny. Localitzada en un dels edificis més emblemàtics de la Bisbal d'Empordà i possiblement en un dels llocs més bonics que han acollit l'exposició itinerant del Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA), els ciutadans del poble i els estudiants de tota la comarca van poder gaudir dels gairebé cinquanta mòduls proposats pel MMACA.

Els mòduls proposats eren de característiques molt diferents. Alguns mòduls eren reptes, com el joc dels gratacels, els camins eulerians, el quadrat grecolatí o el nus Borromeu. Altres mòduls convidaven a fer petites demostracions o veure propietats concretes, com els relacionats amb el teorema de Pitàgores o la proporcionalitat en una, dues i tres dimensions. També hi havia mòduls que permetien veure la bellesa de les matemàtiques, com els calidoscopis i el que no podia fallar en una exposició en una de les capitals catalanes de la ceràmica era un mòdul relacionat amb les rajoles.

L'Ajuntament de la Bisbal, a través del regidor d'educació Enric Marquès i el seu equip, va mostrar amb la seva aposta per portar l'exposició i amb l'oferiment de tots els mitjans possibles la seva voluntat de contribuir als dos objectius principals del MMACA: ajudar a millorar la imatge social de les matemàtiques i servir a l'educació matemàtica escolar des de fora l'escola i amb un format no acadèmic.

L'exposició a la capital baix empordanesa no va tardar a contribuir al segon d'aquests objectius. Des del dia 12, les sales del castell ja es van començar a omplir d'alumnes amb visites guiades de 75 minuts i aquestes no van abaixar el ritme fins al tancament de l'exposició. A més de l'exposició, l'oferta escolar es complementava amb un taller, també de 75 minuts, en què els alumnes podien treballar amb els fractals i les cúpules de Leonardo.



Al llarg dels dos mesos, més de tres mil alumnes d'ESO i cicles superior i mitjà de primària, van participar en les activitats ofertes pel MMACA. De tots aquests alumnes, uns dos mil, a més de visitar l'exposició també van fer el taller.

L'impacte de l'exposició en els alumnes que la visitaven es podia veure en horaris no escolars quan, passejant per les sales, es trobaven els alumnes que ja l'havien visitat amb les seves famílies. En molts casos, aquestes visites les demanaven els nens i els servien per poder seguir amb els reptes que els havien quedat

pendents o per ensenyar als seus pares allò que havien après.

A més de les visites escolars, l'exposició també va acollir una de les proves de la gimcana preparada per a la final provincial del concurs Fem Matemàtiques, que es va organitzar a la Bisbal d'Empordà el 14 d'abril.

Si les visites escolars van començar el 12 d'abril, l'objectiu de millorar la imatge social de les matemàtiques tampoc es va fer esperar. Associades a l'exposició, hi havia previstes dues conferències de divulgació matemàtica al Teatre Mundial. La primera conferència es va pronunciar el 13 d'abril i la va fer Sergio Belmonte. La xerrada va tenir una afluència de públic que va superar totes les expectatives. Unes 190 persones es van acostar a escoltar la conferència, que en aquest cas tractava de matemàtiques i màgia. Un parell de setmanes més tard i després de la bona experiència de la primera conferència, el Mundial va tornar a quedar petit i aquesta vegada es va completar l'aforament màxim de 230 persones per fer geometria amb bombolles de sabó amb Anton Aubanell. Arran d'aquestes dues experiències que van superar tots els pronòstics, conjuntament amb l'Ajuntament i els organitzadors del MMACA, es va decidir oferir una tercera xerrada. En aquesta ocasió, més de 120 persones van assistir a la conferència sobre matemàtiques i música, a càrrec de Joan Jareño i Francina Turón.



A banda del cicle de conferències, també es va oferir a les famílies la possibilitat de fer visites guiades en què s'explicaven els mòduls de manera molt més profunda i tallers familiars on es construïen cúpules de Leonardo i es proposava als participants sortir dels laberints numèrics del MMACA.

Al llarg dels dos mesos que es va poder visitar lliurement l'exposició al Castell Palau de la Bisbal, els responsables del local van calcular que havia estat visitada per més de dues mil persones.

L'èxit de participació de les escoles i del públic general en les activitats proposades fan que es desmenteixin alguns tòpics i mostra que les matemàtiques són interessants per a un sector ampli de la població, que no són avorrides i que tots podem quedar atrapats pels seus reptes. A més, també reforça la idea que activitats i col·laboracions d'aquest tipus funcionen tant en àmbit escolar com municipal.

M'agradaria aprofitar també algunes línies d'aquest article per animar tothom a visitar les sales del MMACA, ja siguin les de l'exposició permanent de Cornellà al Palau Mercader o les de qualsevol de les exposicions itinerants que es van presentant arreu del territori català. Estic convençut que sortireu molt contents i que no us decebrà.

Finalment, i tornant a l'exposició de la Bisbal, és de justícia agrair la feina feta a totes les persones que hi van dedicar hores i que gràcies a ells, entre tots, vam aconseguir que fos un èxit. Enric Marquès, Nuri Trilla, Elena Montiel i el seu equip de l'Ajuntament, tot l'equip de monitores, Benet Amat del CRP, Anton Aubanell, Quim Tarradas i la resta de l'equip del MMACA tant de Girona com de Cornellà i, molt especialment, els membres del comitè local, format per una vintena de mestres i professors compromesos amb l'educació matemàtica dels bisbalencs i bisbalenques.

## Presentació del volum *Grècia IIa (els Elements d'Euclides: llibres I, II, III, IV, V i VI)* de la *Història de la matemàtica* de Josep Pla i Carrera

Sebastià Xambó Descamps  
Professor emèrit  
Departament de Matemàtiques, UPC

L'acte, convocat conjuntament per la Societat Catalana de Matemàtiques i la Secció de Ciències i Tecnologia, se celebrà a les 18.30 hores del propassat 15 d'octubre a la Sala Pi i Sunyer de l'IEC.

La significació institucional de la convocatòria, destinada a celebrar una nova fita del magne projecte de publicar una comprensiva i innovadora *Història de la matemàtica*, va ser subratllada en els parlaments de Joan Antoni Solans, president de la Secció de Ciències i Tecnologia; de David Serrat, secretari científic de l'IEC, i de Xavier Jarque, president de la SCM.



D. Serrat, J. Pla, X. Jarque i J. A. Solans (Iolanda Guevara)

Als parlaments va seguir una presentació del volum pel propi autor. Basada en bona mesura en el capítol 1 del volum *IIa* (pàgines 1–69), consistí a completar amb comentaris orals una quarantena llarga de transparències. En conjunt, fou una indispensable i molt avinent il·lustració de la natura del projecte indicada pel seu subtítol: «Resultats, textos i contextos». No mereixeria menys aquest primer gran moment estelar de la història de la ciència i la cultura: els textos i resultats dels *Elements*, i en particular dels seus sis primers llibres, van encendre una llum del pensament que no ha deixat de brillar fins al dia d'avui.

La presentació transmeté l'encís de l'autor per aquesta llum del *Segle d'Or de la Matemàtica Grega* i pel context únic en què es produí (vegeu a la taula A una sinopsi d'algunes dades rellevants). Euclides té uns vint anys quan Ptolomeu I esdevé faraó d'Egipte, a

Atenes bullen de vida intel·lectual l'Acadèmia de Plató i el Liceu d'Aristòtil (des de fa uns vuitanta i uns trenta anys, respectivament), i a Alexandria s'havien inaugurat el museu i la biblioteca poc abans del seu naixement. Dels quaranta anys que li resten de vida a Euclides, la meitat transcorren en el regnat de Ptolomeu I («Sòter», Salvador) i la segona meitat en el de Ptolomeu II («Filadelf», el que estima els germans). És en aquestes circumstàncies que Euclides produeix tota la seva obra matemàtica, de la qual els *Elements* és la part més coneguda i influent.

TAULA A

aC	Esdeveniment	Lloc
427	n. Plató	Atenes
387	fund. Acadèmia	Atenes
384	n. Aristòtil	Estagira
367	n. Ptolomeu I	Macedònia
347	m. Plató	Atenes
335	fund. Liceu	Atenes
~332	fund. museu i biblioteca	Alexandria
~325	n. Euclides	?
322	m. Aristòtil	Calcis
309	n. Ptolomeu II	Illa de Cos
305	Ptolomeu I faraó	Egipte
285	Ptolomeu II faraó	Egipte
283	m. Ptolomeu I	Alexandria
265	m. Euclides	Alexandria
246	m. Prolomeu II	Alexandria

Després de descriure breument la temàtica de cada un dels sis llibres considerats, que en conjunt s'ocupen de la geometria plana «escolar», i de donar dades numèriques sobre el seu contingut, va fer diverses apreciacions sobre la seva natura híbrida en termes de les filosofies de la ciència platònica i aristotèlica, incloent-hi precisions suscidades per Pappos (IV dC)

en subratllar la importància de determinar les condicions en què un problema geomètric té solució (diorismes).

El text dels llibres dels *Elements* d'Euclides aplegats a *Ila* configura l'apèndix A, amb dues seccions, una dedicada als llibres I, II, III, i IV (geometria plana elemental, pàgines 71–264) i una altra dedicada als llibres V i VI (teoria general de la proporció i aplicacions a la geometria, pàgines 264–352). Del contingut d'aquest apèndix, la presentació n'il·lustrà les definicions (subratllant-ne el contrapunt entre les concepcions platònica i aristotèlica), els postulats, les nocions comunes, i les proposicions (173, de les quals 47 es presenten com a «problemes», és a dir, que descriuen una construcció geomètrica, i les altres 126 com a «teoremes», per bé que en cada cas l'element essencial és la demostració de l'enunciat implícit o explícit). Seguí una anàlisi de les dues nocions aristotèliques d'infinít (potencial i actual) i la tensió entre elles pel que fa al quefer matemàtic. En els *Elements* aquesta tensió es manifesta en el fet que Euclides malda per evitar l'infinít actual, com manifesta la forma d'enunciar el postulat 5, però que tanmateix li compareix de trascantó en la definició de rectes paral·leles (dues rectes del mateix pla que, *prolongades indefinidament* en ambdues direccions, *no es tallen*).

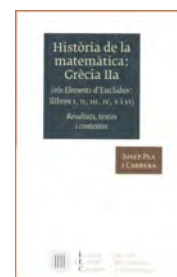
TAULA B  
*Història de la matemàtica: Grècia X (Y).*  
*Resultats, textos i contextos*

X	Y
I	<i>de Tales a Plató i Aristòtil</i>
II	<i>Elements</i> d'Euclides
a	llibres I a VI
b	llibres VII a XIII
III	<i>El segle d'or</i>
a	Aristeu, Eudem, Euclides i Aristarc
b	Arquimedes, Conó i Dositeu
c	Nicomedes, Eratòstenes, Apol·loni, Diocles i Dionísodor

La taula B és una sinopsi dels volums dedicats a la matemàtica grega fins al seu segle d'or. No coincideix amb l'estructura que s'havia previst inicialment, ja que, com diu l'autor a la introducció de *Ila* (pàgines XI i XII), «La història de la matemàtica grega

assoleix el cim al segle III aC, conegut com a «Segle d'Or de la Matemàtica Grega». En aquest segon volum d'història de la matemàtica a Grècia correspondria, doncs, descriure els problemes, textos i contextos d'aquest període per a després, en un tercer volum, exposar-ne els epígons, molt importants, que s'estengueren durant nou segles. Però no ho farem. Interrompem el que seria el desenvolupament normal d'una història de la matemàtica grega per dedicar dos volums (*Grècia Ila* i *Grècia Iib*) als *Elements* d'Euclides. Les raons d'aquesta decisió són múltiples. Una és de tipus metodològic. Ens ha semblat que aquesta història quedaria coixa si no contenia la totalitat dels *Elements* d'Euclides».

Ho considerem una decisió encertadíssima, i per això sembla adient esperar a l'aparició de *Iib* (prevista per abans de l'estiu del 2019) per presentar una recensió conjunta detallada dels dos volums. Segons l'autor, el volum *IIla* es lliurarà a l'IEC durant el mes de gener del 2019. Ens sembla també un encert que entre els matemàtics que s'hi estudien hi hagi Euclides. Això ha de servir per apreciar l'obra matemàtica d'Euclides altra que la continguda en els *Elements*, i també (*IIla*, §3.2, «Les aportacions conceptuals de l'obra d'Euclides») per a «una comprensió cabal del seu pensament, tant l'heretat dels matemàtics i filòsofs que el van precedir com el propi» (*Ila*, pàgina XII).



Josep Pla i Carrera i portada del volum presentat (SX)

Els dos primers volums de la *Història de la matemàtica*, [1] i [2], es van publicar el 2016 (per a una recensió, vegeu *SCM/Notícies* 41, 41–43). El 3 de maig de 2017, Pla fou guardonat, per aquestes obres, amb el premi Crítica Serra d'Or de Recerca, i la revista *Serra d'Or* en publicà una recensió en el número d'octubre del 2017. Ara, el número 42 del



*Noubiaix* (juny del 2018) ha publicat (pàgines 85–88) el «Discurs d'agraïment (ampliat) llegit a l'acte de lliurament del premi Crítica Serra d'Or de Recerca» i del qual trobem just recollir la següent línia: «És una mena d'obra que no s'ha realitzat mai en cap llengua, que jo conegui».

Un detall de la presentació fou la segona transparència, titulada «Us volem a casa!», i que mostrava, sobre un fons groc intens, dibuixos de les cares de les setze persones empresonades o exiliades per motius polítics. Sí, us volem a casa!

L'atzar va fer que la presentació de *IIa* coincidís amb el lliurament dels Premis Nacionals de Recerca al Teatre Nacional. Esperem que aviat els dos esdeveniments coincideixin del tot.

## Referències

- [1] J. Pla: *Història de la matemàtica. Egipte i Mesopotàmia. Resultats, textos i contextos*. IEC, juliol 2016. LXV + 427 pàgines.
- [2] J. Pla: *Història de la matemàtica. Grècia I (de Tales a Plató i Aristòtil)*. IEC, juliol 2016. XIV + 781 pàgines.

## Marc Noy, guardonat amb la medalla Narcís Monturiol

Oriol Serra

Universitat Politècnica de Catalunya

Marc Noy, catedràtic de Matemàtica Aplicada a la Universitat Politècnica de Catalunya, ha estat guardonat enguany amb la medalla Narcís Monturiol de la Generalitat de Catalunya, que reconeix una destacada contribució a la ciència i a la tecnologia a Catalunya.



Marc Noy va obtenir la llicenciatura de Matemàtiques a la Universitat de Barcelona el 1981, i va continuar la seva formació a la Brandeis University (Massachusetts), on va obtenir un màster de matemàtiques el 1983, i

es va doctorar en Ciències de la Informació a la Universitat Politècnica de Catalunya el 1989.

Poc després de doctorar-se, va iniciar una estreta col·laboració amb Ferran Hurtado que el va portar a l'àrea de la geometria discreta i computacional, en què va fer nombroses i substancials aportacions, com l'estudi del graf de *flips* de triangulacions d'un polígon convex, que és la base per a la generació aleatòria de triangulacions amb cadenes de Markov.

La seva inquietud científica l'ha portat a explorar molts altres aspectes de la matemàtica discreta, com l'estudi del polinomi de Tutte, un dels objectes més fascinants de la teoria de grafs. En Marc va aconseguir portar Bill Tutte, un dels pares de la teoria de grafs moderna, a Barcelona per participar en un congrés dedicat al seu polinomi. Aquesta havia de ser una de les darreres activitats científiques de Tutte. En aquesta línia, va establir una llarga col·laboració amb Dominic Welsh, professor a la Universitat d'Oxford, amb qui en Marc va fer una gran amistat personal.

Potser una de les trobades més importants per a la seva carrera científica va ser amb Phillip Flajolet, investigador de l'INRIA a París, i considerat el pare de la combinatòria analítica moderna, amb qui va escriure un dels treballs que segueix sent avui una referència en l'enumeració d'objectes geomètrics per mètodes analítics. És

en aquesta direcció que va obtenir un dels seus resultats més celebrats sobre els grafs aleatoris planars. Els mètodes analítics proporcionen l'eina adequada per tractar aquesta classe de grafs per als quals no hi ha un model probabilístic manejable. Des dels primers treballs de Tutte, s'havien dedicat molts esforços a obtenir la forma asimptòtica per a l'enumeració de grafs planaris. Amb una combinació dels mètodes analítics amb el mètode simbòlic de Flajolet, Marc Noy va tancar el tema d'una manera definitiva amb el seu estudiant i col·laborador Omer Giménez en un article publicat al *Journal* de l'AMS el 2009. Aquesta contribució va obrir la porta a analitzar de forma sistemàtica propietats estructurals de classes generals de grafs de les quals els grafs planaris són només un exemple.

Aquestes contribucions científiques li han valgut ser un dels pocs matemàtics catalans i espanyols que han estat conferenciants convidats a un International Congress of Mathematics, en l'edició que es va fer a Seül el 2014. Entre altres reconeixements, ha obtingut també el prestigiós Humboldt Research Award el 2012, i ha estat *Von Neumann visiting professor* a la Technical Universität de Munic el 2013.

Un dels llegats acadèmics de Marc Noy són els seus estudiants: Anna de Mier, especialista reconeguda en teoria de matroides i professora a la UPC; Sergi Elizalde, investigador de referència en combinatòria enumerativa i professor a Dartmouth College, un dels centres

de la Ivy League als EUA; Omer Giménez, actualment treballant a Google a Califòrnia; Juanjo Rué, reconegut especialista en combinatòria analítica i combinatòria additiva, professor a la Freie Universität a Berlín i actualment a la UPC, o Lander Ramos, treballant també a Google a Dublín.

Marc Noy ha compaginat la seva intensa activitat científica amb la gestió acadèmica i científica. Ha estat director del departament de matemàtica aplicada i vicedegà de la Facultat de Matemàtiques i Estadística a la UPC. Una de les seves contribucions més destacades en aquest àmbit ha estat la direcció de la Barcelona Graduate School of Mathematics del 2015 al 2018. Aquest ambiciós projecte que reuneix els matemàtics més destacats de les universitats de Barcelona i de Catalunya proporciona la plataforma necessària per donar visibilitat internacional a la investigació matemàtica al nostre país, en consonància amb iniciatives semblants a Berlín, París i altres llocs d'Europa. Sota la seva direcció, la BGSMath va obtenir el prestigiós projecte d'excel·lència María de Maeztu el 2015, del qual n'és l'investigador principal, i ha posat en marxa un gran nombre d'iniciatives dirigides a donar forma i contingut a aquest projecte.

La medalla Narcís Monturiol és un merescut reconeixement a la trajectòria científica i acadèmica de Marc Noy. Des d'aquestes pàgines de la *SCM/Notícies* li traslladem la més cordial enhorabona.

## Activitats

### CSACS 2018

Dolors Herbera i Oriol Serra  
Coorganitzadors per la SCM

De l'11 al 14 de setembre es va fer a Bratislava la cinquena edició del congrés conjunt de les societats matemàtiques de Txèquia, Eslovènia, Àustria, Eslovàquia i Catalunya <http://www.math.sk/csasc2018/>, CSASC en el seu palindròmic acrònim. Aquestes trobades es van iniciar a Praga el 2010 després de dues reunions bilaterals de txecs i catalans a Praga el 2005

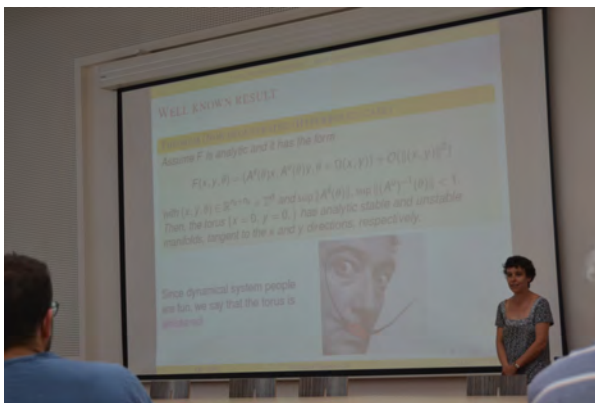
i a Barcelona el 2006, que van deixar molt bon record. Les trobades del CSASC s'han fet després a Krems el 2011 (Àustria), Koper el 2013 (Eslovènia) i Barcelona el 2016. Amb aquesta edició es tanca, doncs, una ronda completa del cicle de trobades que han tingut una alta participació i un bon nivell científic, objectiu bàsic d'aquest projecte.





El president de la SCM, Xavier Jarque, encapçalant la comitiva mentre passava pel pont

Un dels motius que van portar a l'organització d'aquestes trobades va ser establir i consolidar vincles de col·laboració entre matemàtics de les cinc societats en un format que permet un contacte directe i intens, i s'inscriu en el marc de contactes semblants amb altres societats matemàtiques europees amb les quals la SCM també manté contactes estrets. La trobada s'articula a través d'una sèrie de conferències plenàries en les quals s'ofereix l'oportunitat de fer conèixer alguns dels matemàtics més destacats de cada comunitat, i per mitjà d'una sèrie de sessions temàtiques que afavoreixen un contacte científic més intens i específic.



Imma Baldomà mentre presentava la seva contribució

En aquesta ocasió els conferenciants plenaris catalans van ser Imma Baldomà, «Invariant manifolds, local and global behaviour», i Carles Casacuberta, «From algebraic topology to motivic homotopy», que van compartir cartell amb Zdeněk Strakoš (Charles University, Praga), Marjeta Kramar Fijavž (University of Ljubljana), Vera Fischer (University of Vienna),

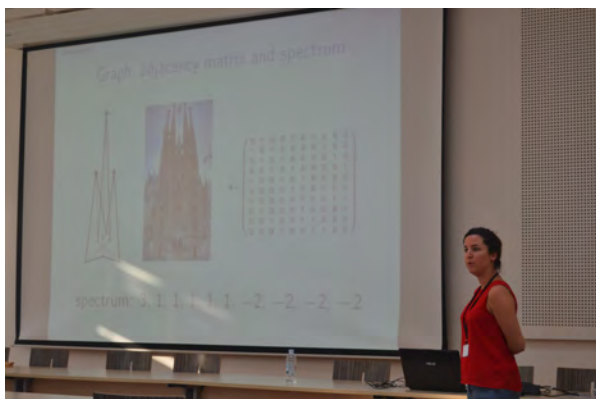
Martin Škoviera (Comenius University, Bratislava), Franz Schuster (University of Technology in Vienna) i Matjaž Omladič (University of Ljubljana).



Carles Casacuberta presentant la seva contribució

En les sessions temàtiques hi participen organitzadors d'almenys dues de les societats, i en aquesta edició van tractar els temes següents:

- «Applications of Stochastic Analysis in Quantitative Finance», J. Pospíšil (República Txeca) i J. Vives (Catalunya).
- «Algebraic and Topological Graph Theory», R. Jajcay (Eslovàquia), A. Malnič (Eslovènia).
- «Functional Analysis and Geometry», E. Kopecka (Àustria), M. Ludwig (Àustria).
- «Time-Frequency Methods for Operators and Function Spaces», H. G. Feichtinger (Àustria), O. Hutník (Eslovàquia).
- «Numerical Workshop», O. Stašová (Eslovàquia), T. Oberhuber (Txèquia).
- «Graph Theory and Combinatorics», J. Kratochvíl (Txèquia), O. Serra (Catalunya), M. Škoviera (Eslovàquia), M. Drmota (Àustria), S. Cabello (Eslovènia).
- «Categorical Methods in Algebra and Topology», J. Rosický (Txèquia), D. Herbera (Catalunya), C. Casacuberta (Catalunya).
- «Commutative Algebra and Algebraic Geometry», A. F. Boix (Israel), E. Faber (Regne Unit).
- «Uncertainty Modelling», M. Štepička (Txèquia), M. Kalina, (Eslovàquia).



Aida Abiad, participant de la sessió de combinatòria, il·lustra la seva presentació amb la Sagrada Família

A la trobada, que es va fer a la Slovenská Technická Univerzita de Bratislava i amb la presència de més de 130 participants, dels quals més d'una vintena de matemàtics catalans. Cal agrair al president de la Societat Matemàtica Eslovaca, Martin Kalina, a qui va dirigir l'organització de la trobada, l'expresident de la societat Roman Nedela, i a tot l'equip d'organització, que van fer que tot funcionés a la perfecció.



Roman Nedela, responsable de l'organització, amb Martin Kalina, president de la Societat Matemàtica Eslovaca, i Jasna Prezelj, de la Societat Matemàtica Esolvena, en el parlament al sopar de la trobada

Durant la trobada es va fer la habitual reunió per tractar sobre el futur d'aquest esdeveniment. Tot i haver completat el primer cicle d'edicions, el representant de la Societat Matemàtica Txeca va animar a continuar amb aquest format i es va oferir a organitzar-lo a Praga el 2021. A més, tots els membres es van comprometre a contribuir des de la plataforma del CSASC a l'èxit de l'European Congress of Mathematics 2020, que es farà a Eslovènia.

### 3a Conferència MATRIX

Guido Ramellini  
Museu de Matemàtiques de Catalunya

La tercera edició de la Conferència MATRIX (Mathematics Awareness, Training, Resource & Information Exchange), organitzada pel MMA-CA i el MoMATH, s'ha dut a terme a Cornellà-Barcelona del 29 al 31 d'octubre. Les anteriors edicions van ser a Dresden (2014) i a Leeds (2016).

Per la nostra banda, va ser molt atrevit, i difícil, organitzar aquesta iniciativa en aquests temps tan complicats per a Catalunya. Els efectes de l'aplicació (i la interpretació) de l'article 155 de la Constitució o de la incertesa i la por que generava en tots els àmbits de l'administració i de la societat ens complicava trobar l'ajuda necessària i no només pel que feia a finançament.

Això va entorpir l'acció de difusió de l'acte i ens ha fet perdre la presència de diverses persones, especialment del món de la divulgació, que s'havien implicat en les anteriors edicions o dels que venen de més lluny i necessiten visat.

A més, encara que hem tingut en gran consideració l'experiència de les organitzacions que havien fet les anteriors edicions del MATRIX, volíem donar a la «nostra» conferència una estructura diferent, que permetés un diàleg més enriquidor entre els participants. En alguns moments, la sensació de llançar-nos al buit sense paracaigudes l'hem sentida a dins i l'hem vista als ulls dels altres companys de viatge.

Per sort, anàvem trobant complicitats i simpaties per tot arreu: a les institucions

públiques (Ajuntament de Cornellà, Diputació de Barcelona i Generalitat de Catalunya), a les fundacions privades (Caixa i Cellex) i a les agències culturals i educatives (universitats, Museu Agbar, CosmoCaixa, SCM, CSR). Tothom es declarava interessat, compartia els objectius (continuar en la construcció de la xarxa de divulgació de les matemàtiques i d'intercanvi d'experiències i materials) i ens animava a continuar.

Vam anant recollint els inputs positius i enfrontant-nos als negatius amb l'optimisme de la voluntat i el pessimisme de la raó, també vam ampliar el nombre de sòcies i socis del MMACA que col·laboraven en el projecte i aportaven energia, coneixements i experiències, fins a l'últim moment de la Conferència.

La presència a la inauguració de la Conferència del President de la Generalitat, Quim Torra, i de l'Alcalde de Cornellà de Llobregat, Antonio Balmón, acompanyant els responsables del Museu Agbar, de la Fundació La Caixa, del MoMath de New York i del MMACA, va ser una demostració molt valorada i significativa de l'interès suscitat pel MATRIX i l'aposta de les institucions locals per a l'educació i la cultura.

Hauríem de reflexionar en tots els àmbits: polític, econòmic, cultural, ecològic... , que qui fa les coses són les persones, així que s'ha de tenir cura de les persones si es volen fer bé les coses. Sembla senzill, però de vegades tens la sensació que, tant en les matemàtiques com en la vida, les regles senzilles són les més difícils d'aprendre i les més fàcils d'oblidar.



## Organització

La Conferència MATRIX continua sent una trobada d'amics i amigues, que comparteixen desitjos, vivències i experiències, però que són

també uns grans professionals del món de la disseminació de la ciència, que presenten projectes i resultats o s'obren a discutir problemes. Això conjuga l'efectivitat de la nostra acció amb l'afectivitat de la nostra relació i ens dona força i convicció.

El nombre relativament petit de participants, que continua en prop de 100 persones, facilita el contacte personal i l'acolliment i la integració dels que venen per primer cop.

Com en les edicions anteriors, hi ha hagut una forta presència de participants locals, de Catalunya i de l'Estat; molts companys i companyes del món de l'escola que estan organitzant diverses iniciatives d'educació no formal (fires, jornades, tallers...) i volen donar més estabilitat, identitat i consistència a les seves activitats.

Malgrat això, els participants van venir de 15 països (Alemanya, Àustria, Brasil, Bulgària, Eslovènia, Espanya, Estats Units, França, Irlanda, Portugal, Regne Unit (Anglaterra, Escòcia i Gal·les), Romania, Sèrbia, Suïssa i Xile).

En tot cas, cal reflexionar sobre com fidelitzar més les persones i les institucions internacionals que ja participen i ampliar la presència dels que encara no s'han sentit cridats. Tenim una plataforma disponible (Imaginary.org) i dues propostes damunt la taula, que són complementàries i s'hi poden integrar: la Global Math Week (GMW), que James Tanton ha creat a través dels seus Exploding Dots [i] (que tenen tots els materials en castellà) i la International Cooperation for Math Festivals (CMF) [ii], que Eoin Gill, sobre la base de la seva Ireland Math Week, ha desenvolupat des d'un dels grups de conversa d'aquest MATRIX.

La primera (GMW) és una iniciativa dirigida als estudiants: durant una setmana disposen de reptes de matemàtiques que poden resoldre a l'escola o a casa, i després poden penjar-ne resultat en xarxa.

Queda per veure com, des de les entitats de l'educació no formal, podem donar suport a la iniciativa i ajudar per difondre la informació.

Els Math Festivals (CMF) veuen els museus o les associacions en el focus de l'acció. Ja existeixen moltes iniciatives en diferents països, algunes que coincideixen per temps i continguts: el dia II, el Martin Gardner Day, etcètera, però la majoria són esdeveniments de



diversa durada (del Mes de la Ciència a Sèrbia a les diverses setmanes o dies dedicats a les matemàtiques) que corresponen a efemèrides locals.

Sense alterar de cop les diverses cites, la proposta voldria aglutinar-les en un únic projecte que desenvolupi un calendari compartit i creï una xarxa d'intercanvi d'experiències, materials i persones, per millorar la qualitat, involucrar cada cop més realitats locals i ampliar-ne l'impacte mediàtic.

En aquest sentit, haver apostat per l'ajuda d'una professional ens ha obert les portes al mitjans de comunicació. Cal valorar aquesta experiència de cara a altres projectes, com les JAEM o el C<sup>2</sup>EM, que tenen una extraordinària repercussió a escala local o estatal en el món de la educació, però poc impacte en l'opinió pública i en el col·lectiu dels docents.

Per donar continuïtat a la col·laboració i a la circulació d'informacions entre els participants del MATRIX, reals o potencials, hem avançat la proposta de crear la figura del MATRIX Ambassador, que reculli informació sobre les iniciatives locals i difongui els materials elaborats en la xarxa MATRIX a les entitats educatives i culturals de la pròpia àrea de referència.

És força evident que en aquests últims anys hi ha hagut un interès creixent dels *science centers* envers les matemàtiques. No hem de deixar escapar aquestes col·laboracions potencials, que poden ser molt enriquidores per a tothom, fins i tot per trobar nous formats i llenguatges.

## Continguts

El programa preveia quatre blocs principals d'activitats: conferències plenàries (32% del temps del congrés); grups de conversa (30%); sessions de pòsters i mostra de materials (23%) i visita als museus (Agbar, CosmoCaixa i MMACA) (15%).

### Conferències plenàries inspiradores

- «El fenomen del Big Data», a càrrec d'Eulàlia Soler.
- «Avaluació de l'impacte en les vocacions científiques», a càrrec de Digna Couso, Sergio Marco i Lluís Noguera.

- «*Role play* de coordenades i dansa de funcions», a càrrec del Grup Cúbic.

### Conferències plenàries obertes

- «Art i matemàtiques», a càrrec de Rinus Roelofs [iii].



- «Catàstrofes, malalties i crims: prevenir el risc amb les matemàtiques», a càrrec de Rosario Delgado.

A les reservades als inscrits al MATRIX va faltar temps per el debat, encara que molts dels arguments de les conferències van ser després objecte de reflexió ens els grups de conversa. Hauria sigut interessant que els ponents haguessim pogut participar-hi i és un aspecte per tenir en compte en el futur.

Els temes que proposaven (Big Data i avaluació) continuen oberts, especialment pel que fa a la seva relació amb els museus. Tenim les presentacions dels ponents i les inclourem al recull de materials que estarà disponible en xarxa per donar la possibilitat de fer una anàlisi més puntual i atenta, necessària per avançar propostes concretes. En tot cas, no són temàtiques que es resolen en un dia i és important haver-les sotmès a l'atenció dels participants al MATRIX per poder-les desenvolupar.

A les conferències obertes, que es van fer a les tardes al CosmoCaixa, s'hi van afegir companys i companyes del món de l'ensenyament i, cada una en la seva especialitat, van ser molt apreciades. Les dues estableixen ponts entre disciplines i amb l'entorn social i cultural. Provoquen emocions i reflexió, i obren un col·loqui amb usuaris diferents, per mostrar aspectes de les matemàtiques que no són els habituals. Properament aquestes xerrades estaran disponibles a la xarxa (web de MATRIX...).

## Grups de conversa

Era potser l'aposta més arriscada: els temes per debatre són qüestions obertes i la modalitat per fer-ho, inspirada en el model de *PechaKucha*, que havia donat bons resultats a C2EM, trencava amb la praxis de les anterior edicions del MATRIX. La idea era començar per unes breus intervencions (3-5 minuts) sobre un tema, proposat a través d'una frase provocadora, per després obrir un debat entre els participants.

Els *speakers* que volien intervenir havien enviat uns breus escrits que permetien al coordinador del grup organitzar el debat. En el pitjor dels casos, el debat seria entre els *speakers*, però la brevetat de les aportacions inicials donava temps a una participació més àmplia, com desitjaven que fos i com va ser en tot els CG.

Les intervencions dels *speakers*, notes del debat i successives aportacions dels participants també seran recollides per a la seva publicació.

Un cop més, lluny de proposar receptes o solucions definitives, ens agradaria pensar que hem obert una reflexió i un procés de intercanvi d'experiències, de manera que la pròxima edició de la Conferència pugui disposar d'un repertori teòric organitzat i un recull de noves activitats, que ens permetin millorar la proposta d'educació no formal que ve dels museus i dels divulgadors de matemàtiques.

Si ens hem de quedar amb un tema, pensem que el nus principal és encara la relació amb les escoles, o sigui el diàleg entre les educacions formal i no formal, ja que l'objectiu comú és molt clar: millorar l'aprenentatge del nostre alumnat, però l'encaix estratègic encara se'n escapa. Quan, des dels museus, afirmem que l'experiència de la visita activa a una exposició és insubstituïble, pel valor emocional i vivencial que comporta, i que les activitats que es fan al museu han de ser diferents de les activitats escolars, es provoca sovint una resposta defensiva per part del professorat, com si poséssim en dubte la seva funció o la qualitat de la seva feina. Creiem que la cosa no va per aquí. La majoria de les persones que s'ocupen d'educació en les entitats patrimonials venen del món de l'escola i estan més que disposades a reconèixer el valor insubstituïble de l'ensenyament formal. D'altra banda, es publiquen articles com el *The 95 percent Solution* [iv], que, referint-se a la realitat dels Estats Units

(no sempre comparable a l'europea), afirma que el 95% de les vocacions científiques no són productes de l'educació formal, sinó de lectures, documentals, visites als *science centers* que han encès una passió cultivada fora de les escoles.

## Sessió de pòsters i petita exposició de mòduls expositius, materials per tallers i exemples d'activitats

Com en les altres edicions del MATRIX, vam oferir la possibilitat de presentar pòsters i materials als participants, que ens van fer arribar una sol·licitud amb les seves necessitats. Nou entitats van presentar pòsters i 22 taules van ser ocupades per materials tangibles o virtuals, amb propostes per a exposicions, fires, tallers i aules d'escola.

Van representar un ventall molt ampli de propostes diferents, nuclis de diàlegs i intercanvis d'experiències, ja que les inquietuds que tenim són molt similars i els enriquiments fàcils d'incorporar a les nostres rutines.

A l'espera de les respostes d'un qüestionari que anirem elaborant i distribuint durant les pròximes setmanes entre els participants del MATRIX, i de les observacions de les amigues del Comitè Científic, els primers comentaris que hem pogut escoltar són força positius.

## Aquí i ara

En aquest sentit, serà molt interessant veure com es desenvoluparà aquesta xarxa a l'Estat espanyol, on tenim un ferment molt interessant.

- L'aspecte bàsic, que no ens cansarem mai de reivindicar, perquè en cap altre país és tant potent i capil·lar, és l'acció de les societats del professorat de matemàtiques, federats en la FESPM [v] i la possibilitat de mantenir l'elaboració d'idees i projectes a través de les JAEMs [vi] i de les revistes que s'editen, com *Suma* i *Noubiaix*, i revistes i butlletins locals.
- Potser no n'hauríem de parlar nosaltres, però és aclaparador l'èxit de les iniciatives del MMACA: de l'exposició permanent (visites reservades fins al 2019) a les exposicions itinerants (calendari ple fins al 2020, reserves exhaurides sis mesos abans de muntar l'exposició), dels tallers als maletins didàctics, que ens proporcionen la possibilitat d'operar al territori (projectes educatius de poble) i apropar-nos encara més als usuaris.

La creació de nuclis d'amics del MMACA a Girona, Reus-Tarragona i Lleida perfilen la possibilitat d'una xarxa d'instal·lacions properes i sostenibles, amb un enorme potencial d'impacte sobre els projectes educatius.

- S'ha creat el DIMA [vii], la Xarxa de Divulgadors de Matemàtiques, que ha tingut molt bona acollida al gremi i ha elaborat una llista d'accions perquè la divulgació trobi un espai propi en l'estratègia educativa i no es quedi com a pura iniciativa d'uns quants il·luminats amb la vocació del bufó (dit amb tot el respecte que mereix l'única persona que denuncia la nuesa de l'emperador).
- Hi ha inquietuds en l'administració, almenys a Catalunya. Els projectes Escola 21 o la formació STEM [viii] en són uns bons exemples. Mentrestant, es mantenen les jornades de les entitats associades en la FEEMCAT i de la SCM i n'apareixen altres (DGSMat), continuen tossudament els projectes Estalmat [ix] i Anem x + Matemàtiques [x] i es perfila la propera edició del C2EM [xi].
- En l'àmbit de l'Ajuntament de Barcelona hi ha molt d'interès sobre el projecte Educació 0-6 [xii] per crear una línia pedagògica coordinada en aquesta etapa que té una importància capital en tot el desenvolupament de les diferents intel·ligències i competències de l'individu.

Esperem que el ressò mediàtic que ha obtingut la conferència MATRIX ajudi a millorar l'atenció dels mitjans de comunicació, de les institucions i dels ciutadans sobre tot el que es mou entorn de l'educació formal i no formal i

## XV Jornada d'Educació Matemàtica

Daniel Ruiz Aguilera

Societat Balear de Matemàtiques XEIX

Els passats dies 28 i 29 de setembre de 2018 es va celebrar a Palma la XV Jornada d'Educació Matemàtica, convocada per la Societat Balear de Matemàtiques XEIX, la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana Al-Khwarizmi, la Federació d'Entitats de l'Ensenyament de les Matemàtica de Catalunya

de les matemàtiques en tots els seus aspectes: educatiu, cultural i, per què no?, emocionant i lúdic.

Tenim molta (i bona) feina feta. En tenim més (i més bona) per fer.

## Webgrafia

- [i] <https://www.explodingdots.org/>
- [ii] <http://www.mathsweek.ie/2018/>
- [iii] <http://www.rinusroelofs.nl>
- [iv] Falk, J.H. & Dierking, L.D. *The 95 Percent Solution. School is not where the most Americans learn most of their science*, in *American Scientist* vol. 98 núm. 6, pag. 486-493.
- [v] <http://www.fespm.es/>
- [vi] <https://www.19jaem.org/es>
- [vii] <https://www.icmat.es/outreach/dima>
- [viii] [http://xtec.gencat.cat/ca/formacio/formaciogeneralprofessorat/actualitzacio\\_cientifica\\_didactica/formacio-stem/](http://xtec.gencat.cat/ca/formacio/formaciogeneralprofessorat/actualitzacio_cientifica_didactica/formacio-stem/)
- [ix] <http://www.estalmat.org/>
- [x] <http://feemcat.org/anem-x-matematiques/>
- [xi] <http://c2em.feemcat.org/>
- [xii] <http://ajuntament.barcelona.cat/escolesbressol/ca/projectes-territori>



La participació fou massiva, amb més de dues-centes vint-i-cinc persones de totes les etapes educatives de l'ensenyament de les matemàtiques de diferents indrets dels territoris de parla catalana.



### Connectant amb les matemàtiques

El tema triat per a la quinzena edició d'aquesta jornada fou les connexions a matemàtiques, amb els objectius següents: aprofundir en aquesta dimensió de la competència matemàtica, conèixer algunes experiències d'aula en la línia de connectar les matemàtiques amb la realitat, poder experimentar amb diferents materials que modelitzin la realitat i reflexionar sobre la importància de connectar altres matèries amb les matemàtiques.



La conferència inaugural fou a càrrec de Carme Burgués Flamarich, de la Universitat de Barcelona, amb el títol «Caçadors de connexions. Descobrint i usant les connexions matemàtiques».

A continuació, es desenvoluparen tallers destinats a diverses etapes educatives. Per a

l'educació infantil, els tallers van ser «Els policubs: un pont entre la vida quotidiana i les matemàtiques», impartit per Maria Àngels Portilla, del CEIP Son Anglada de Palma, i «El taller d'art i les instal·lacions artístiques per aprendre matemàtiques», presentat per Ana Belén Petro, de la Universitat de les Illes Balears. Els tallers presentats per a l'educació primària van ser «MateJonc, el treball de matemàtiques al 2n cicle de primària», a càrrec de Teresa Llompart, del Col·legi Mata de Jonc de Palma; «Tocam i construïm les operacions aritmètiques», presentat per Pere Fuster, del Col·legi Sant Bonaventura d'Artà, i «Un exemple de taller al CEIP Mestre Colom: àrea i perímetre, una parella inestable», presentat per Pepa Pizà i Carolina Marí, del CEIP Mestre Colom de Bunyola. Pel que fa a l'educació secundària, es van presentar tres tallers: «*Role-plays* a classe de matemàtiques», dirigit per membres del Grup Cúbic de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona; «La geometria de l'espai a partir dels envasos», a càrrec de Maria del Mar Rigo, de l'IES Santanyí, i «Relacions de longitud, superfícies i volum», per Margalida Riera, del Col·legi Sant Vicenç de Paül de Sóller.



Dissabte es va obrir amb la presentació de comunicacions. Per a educació infantil: «Quina quantitat de sucre porten els nostres berenars?», de Joana Maria Campomar, del CEIP Norai d'Alcúdia; «Matemàtiques divertides a infantil», de Sergi López i Maria Tomàs del CEIP Marian Aguiló de Palma. A educació primària, «Matemàtiques amb profit», de Jerònia Capó, Emma García, del CEIP Badies de Lluçmajor; «Celebrem el Dia Escolar de les Matemàtiques», a càrrec de M. Antònia Camps, del CEIP Bartomeu Ordines de Consell, i la comunicació «Quadern de mates, quadern amb

mates», de Magdalena Martí, del CEIP Marian Aguiló de Palma. Per a l'educació secundària, «Matemàtiques als projectes», de Cristina Olivares, de l'IES Antoni Maura de Palma; «La casa dels meus somnis», de Jesús Manel Crespí, de l'IES Porto Cristo, i «El laboratori de matemàtiques com a entorn d'aprenentatge», de Manel Martínez Pascual, de l'ABEAM.



Seguidament, es presentaren les taules d'experiències: «Capses matemàtiques», del CEIP Sant Miquel de Son Carrió; «Experimentem amb les còniques», per part de membres del Grup Cúbic de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona; «Surfejant l'ona d'Agnesi», del Centre d'Aprenentatge Científicomatemàtic de Palma; «Propostes de l'ambient de Numeratis», del CEIP Puig de Fàtima de Puigpunyent; «Contextos a infantil i primària», del CEIP Marian Aguiló de Palma, i «Un Mondrian més matemàtic» del CEIP Maria Antònia Salvà de Son Sardina.

Posteriorment, es va fer la presentació de les línies d'impuls de les conclusions del Congrés Català d'Educació Matemàtica (C2EM).



A continuació, es va fer l'acte de lliurament del premi Maria Antònia Canals, atorgat en aquesta edició a David Barba, Cecilia Calvo i Anna Cerezo, pel blog PuntMat, que van fer una presentació de l'experiència premiada.

Després es va seguir amb la presentació de l'experiència «Rutes matemàtiques a València», a càrrec de Tomàs Queralt, de la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana Al-Khwarizmi. La jornada es va tancar amb la presentació d'unes conclusions.

Pel que es pot comprovar, la quantitat de propostes va ser molt extensa i variada, i va posar de manifest el moment d'innovació que s'està vivint en l'educació matemàtica. També és molt destacable l'ambient de debat i d'aprenentatge que es va respirar durant els dos dies, que impulsa a seguir organitzant trobades semblants en el futur.

Es poden consultar tots els materials presentats (presentacions i altres documents), així com fotografies de la jornada al web <http://xvjem.xeix.org>.

## Activitats amb ajut de la Societat

### 9a edició del concurs Planter de Sondeigs i Experiments 2018

Lourdes Rodero

Coordinadora del concurs i secretària del jurat

L'1 de juny passat es van lliurar els premis del concurs Planter de Sondeigs i Experiments, que enguany arriba a la seva 9a edició. Aquest concurs que està parcialment finançat per la SCM, el convoquen anualment les tres facultats de Catalunya amb estudis de Grau

en Estadística (Facultat de Matemàtiques i Estadística de la UPC, la Facultat d'Economia i Empresa de la UB i la Facultat de Ciències de la UAB), està adreçat a estudiants d'ESO, batxillerat i cicles formatius, i té com a objectiu principal despertar en els estudiants la curio-

sitat per l'estadística com a eina fonamental en la recerca, tant en ciències experimentals com en ciències socials. Els equips participants (de fins a cinc alumnes) realitzen un treball d'estadística, on donen resposta a una pregunta rellevant utilitzant tècniques estadístiques, i presenten els resultats en un informe escrit.

Aquest any 2018, s'han lliurat 99 treballs amb 322 alumnes participants, que han estat dirigits per 37 professors de 22 centres d'ensenyament secundari d'arreu Catalunya i Balears.



La inquietud científica dels joves participants del concurs els ha portat a fer experiments, a realitzar enquestes i a fer estudis observacionals que els han permès respondre a moltes de les preguntes que s'havien plantejat al començament i que ens han proporcionat coneixement sobre temàtiques molt diferents:

- **Ús de les noves tecnologies i xarxes socials:** s'ha tractat molt l'ús de les xarxes socials, tema de gran actualitat i que preocupa especialment els nostres joves.
- **Aficions i oci:** s'han treballat temes relacionats amb l'esport, amb la música i amb els llibres.
- **Alimentació i hàbits saludables:** «Canvien els gustos amb l'edat?», «Som més "dolços" quan som joves?», «Quines aigües ens agraden més?» Els estudiants han intentat donar resposta a aquestes preguntes.
- **Salut i epidemiologia:** alguns estudiants estan interessats en aquesta branca de l'estadística, i s'han fet preguntes com: «Quin càncer és el que causa més morts per edat?», «Canvia el ritme cardíac segons el pes?», «Es tenen més criatures en lluna plena?».

En aquesta edició s'han fet molts experiments: «Quin herbicida funciona millor?», «Esclatem crispetes?», «Fem bombolles?». Fins i tot han fet carreres de cargols!

Totes aquestes qüestions i algunes més s'han respost mitjançant experiments senzills que han donat resultats ben interessants.

Els organitzadors i el jurat del Planter de Sondeigs i Experiments, després d'examinar tots els treballs presentats, podem constatar que tots els estudiants participants han après molt i que, a més, s'ho han passat molt bé (i nosaltres també).

### Treballs premiats

Enguany per cada categoria s'han atorgat dues o tres mencions i el guanyador. Els treballs guanyadors en cada una de les quatre categories del concurs van ser els següents:

- 1r i 2n d'ESO: «Cargols silvestres vs cargols de granja», dels estudiants Aran Capdevila, Pau Buscall, Queralt Santacreu i Raquel Martin (IES Serra de Noet de Berga), dirigits per la professora Sílvia Salvador.
- 3r i 4t d'ESO: «Estadística i Fermi: les pilotes de futbol i les canyes de Formentera», dels estudiants Hatim Ben Hamza Shaim i Isam Bouhia El Haouzi (IES Marc Ferrer de Formentera), dirigits per la professora Lucía Bayo.
- Batxillerat i cicles formatius: «To what extend having previous information changes your answer in general knowledge questions», de les estudiants Ariadna Sorribas, Àstrid Mayné, Catalina Palacios, Laura Adell i Míriam Lorenzo (Aula, Escuela Europea), dirigides per la professora Mireia Vinyoles.
- Premi Planter-Idescat: «Ja sabeu com es dirà?», realitzat per Albert Jiménez (Mare de Déu de Núria de Barcelona), dirigit per professora la Laura Cortés.

Els guanyadors de les tres principals categories (1r i 2n d'ESO, 3r i 4t d'ESO i batxillerat i cicles formatius) van representar Catalunya en la setena edició de la fase nacional d'aquest concurs, que es va fer a Cantàbria del 26 al 28 de juny, i el treball de la categoria 1r i 2n d'ESO va resultar-ne el guanyador.



## XXV Encuentro de Topología

Javier J. Gutiérrez

Universitat de Barcelona

Els dies 19 i 20 d'octubre es va celebrar a l'Institut d'Estudis Catalans (Barcelona) el XXV Encuentro de Topología. L'Encuentro de Topología és una de les activitats troncales de la Red Española de Topología (RET), que se celebra anualment des de l'any 1993. La seva finalitat és promoure la col·laboració entre els grups de recerca espanyols en topologia, així com estimular l'intercanvi i la transferència de coneixements amb altres disciplines.

Aquest any, amb motiu del vint-i-cinquè aniversari dels Encuentros de Topología, el comitè científic de la RET va decidir que l'edició d'enguany se celebrés de nou a Barcelona, ja que la primera, impulsada i promoguda pels professors Jaume Aguadé i Manuel Castellet, va tenir lloc a Bellaterra l'any 1993.



Conjuntament amb aquesta trobada, i des de l'any 2012, se celebra també l'Encuentro de Jóvenes Topólogos. En aquesta activitat es reuneixen joves investigadors (estudiants de màster i doctorat i també nous doctors) amb la topologia com a interès comú perquè puguin compartir els seus treballs. La setena edició va tenir lloc els dies 16, 17 i 18 d'octubre al Centre de Recerca Matemàtica.

L'assistència en l'edició d'enguany va ser d'un total de 70 participants en el XXV Encuentro de Topología i de 33 joves investigadors en el VII Encuentro de Jóvenes Topólogos.

El programa científic de l'Encuentro va constar de sis conferències plenàries impartides per conferenciantes de primer nivell: Enrique Artal (Universidad de Zaragoza), Luis Hernández Corbato (Universidad Politécnica de Madrid), Marta Macho-Stadler (Euskal Herriko Unibertsitatea), Eva Miranda (Universitat Politècnica de Catalunya), Aniceto Murillo (Universidad de Málaga) i José Antonio Vilches (Universidad de Sevilla). El dissabte al matí també va tenir lloc una activitat divulgativa de realitat virtual i manipulació d'objectes geomètrics en 3D a càrrec de José Luis Rodríguez (Universidad de Almería).

Pel que fa a l'Encuentro de Jóvenes Topólogos, el programa científic incloïa dos minicursos impartits per Daniela Egas (EPFL), «Topología y neurociencia», i Ignasi Mundet (Universitat de Barcelona), «Acciones de grupos finitos sobre variedades diferenciables», i també dotze comunicacions dels participants.

Finalment, voldríem agrair les ajudes econòmiques i organitzatives de les institucions següents que han fet possible que els Encuentros de Topología 2018 hagin estat tot un èxit: Centre de Recerca Matemàtica, Institut de Matemàtica de la Universitat de Barcelona, Ministerio de Economía y Competitividad, Red Española de Topología i Societat Catalana de Matemàtiques.



Albert Avinyó  
Editor de la *SCM/Notícies*

Des de la *SCM/Notícies* volem felicitar molt cordialment tots els premiats següents:

### SCM i IEC

- El Ple de l'Institut d'Estudis Catalans del 8 de novembre de 2018 va escollir el professor **Joaquim Bruna** com a membre numerari de la Secció de Ciències i Tecnologia d'aquesta institució. El professor Bruna és doctor en matemàtiques per la UAB, on és catedràtic d'Anàlisi Matemàtica i on ha dirigit el seu Departament de Matemàtiques. També ha estat director del Centre de Recerca Matemàtica (CRM) de l'any 2007 al 2015. És autor o coautor de més d'una seixantena d'articles de recerca i, també, d'articles de divulgació, biografies i llibres de text.



- El jurat del premi Mària Antònia Canals va decidir atorgar el guardó de l'edició d'aquest any 2018 als autors del blog **PuntMat**, **Ana Cerezo**, **Cecília Calvo** i **David Barba**. Aquest premi, convocat anualment per la SCM, la FEEMCAT, la Societat Balear de Matemàtiques-SBM Xeix i la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana Al-Khwarizmi (SEMVC), vol ser un reconeixement a les experiències innovadores d'educació matemàtica realitzades a qualsevol nivell educatiu i en qualsevol dels territoris. En l'edició d'aquest any, el jurat del premi va voler reconèixer el treball desenvolupat des del blog PuntMat per a la millora de l'ensenyament de les matemàtiques

d'infantil, primària i secundària des del 2011. En aquest blog s'ofereixen recursos innovadors, com ara experiències d'aula, xerrades, cursos de formació i articles, que són un punt de referència per a molts mestres i professors. Els recursos que proposen tenen en comú la incorporació del joc, la manipulació de materials, i els applets a l'aula de matemàtiques. El premi va ser lliurat el dissabte 29 de setembre al matí a Palma de Mallorca durant la jornada conjunta de les quatre associacions convocants.

### Altres premis, beques i reconeixements

- El Govern de la Generalitat de Catalunya va aprovar, el 12 de setembre de 2018, la concessió de la Medalla i de la Placa Narcís Monturiol a 19 personalitats i una institució, entre les quals es troba el catedràtic del Departament de Matemàtiques de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), **Marc Noy**. Aquest guardó, instituït per la Generalitat l'any 1982, reconeix la feina de persones i entitats en el desenvolupament de la ciència i la tecnologia a Catalunya. El professor Marc Noy ha estat distingit amb la medalla per les seves contribucions en combinatòria i teoria de grafs. Llicenciat en Matemàtiques per la Universitat de Barcelona, màster en Matemàtiques per la Brandeis University (Estats Units) i doctor en Ciències de Computació per la UPC, ha rebut també el Premi de Recerca 2012 de la Fundació Alexander von Humboldt i ha estat director del Barcelona Graduate School of Mathematics (BGSMath), del 2015 al 2018. És director científic del programa d'excel·lència BGSMath – María de Maeztu des de l'any 2015. A la secció «Noticiari» d'aquest mateix número de la *SCM/Notícies* podeu trobar un article més extens d'aquest premi i del seu guardonat, escrita pel professor Oriol Serra (UPC).
- **Xavier Ros-Oton**, matemàtic format a l'FME-UPC, ha rebut una de les prestigioses

ERC Starting Grants 2018 pel seu projecte «Regularity and singularities in elliptic PDE's: Beyond monotonicity formulas» presentat des de la Universitat de Zuric, on ell actualment hi està vinculat com a Lecturer in Pure Mathematics. El Consell Europeu de Recerca (European Research Council, ERC) atorga ajuts a investigadors excel·lents per realitzar projectes trencadors i d'alt risc que contribueixin a avançar més enllà de les fronteres del coneixement. Aquests ajuts estan oberts a investigadors de totes les nacionalitats que portin a terme la seva recerca en una institució europea i que passin un mínim del 50% del seu temps total de dedicació a Europa. En matemàtiques, i en aquesta darrera convocatòria, s'han atorgat onze ERC Grants per a tot Europa (i per a totes les àrees de les matemàtiques), i en Xavier ha estat l'únic matemàtic de l'Estat que ha obtingut aquest important ajut, dotat amb 1.335.250 euros per a un període de cinc anys. Xavier Ros és doctor en Matemàtiques per la UPC (2014, premi extraordinari de doctorat), ha treballat a la University of Texas at Austin (EUA, 2014–17), i actualment a la Universitat de Zuric (Suïssa). Com a investigador, treballa principalment en el camp de les equacions en derivades parcials. L'any 2017 va rebre el premi J.L. Rubio de França de la Real Sociedad Matemàtica Española (RSME), un dels premis més importants en matemàtiques a l'Estat espanyol. També el 2017, va ser distingit amb el premi Antonio Valle de la Sociedad Española de Matemática Aplicada (SeMA). Amb 29 anys, es va convertir en el guanyador més jove d'aquest premi i en la primera persona a guanyar-los tots dos el mateix any. En la secció «Contribucions» d'aquest mateix número de la *SCM/Notícies* podeu trobar un article, escrit pel mateix Xavier, on explica, amb molt més detall, el contingut del seu projecte.

- L'article «Rigorous Computer-Assisted Application of KAM Theory: A Modern Approach» (Foundations of Computational Mathematics, 17, 5, 1123–1193, 2017) del professors **J.L.L. Figueras**, **A. Haro** i **A. Luque** ha estat guardonat amb el premi R.E. Moore. Aquest premi, instaurat l'any 2002, vol premiar la millor aplicació de les tècniques intervalars. Àlex Haro és professor del Departament de Matemàtiques i Informàtica de la UB mentre que J. Ll. Figueras, actualment a la Universitat d'Uppsala, és doctor per la UB.

ach» (Foundations of Computational Mathematics, 17, 5, 1123–1193, 2017) del professors **J.L.L. Figueras**, **A. Haro** i **A. Luque** ha estat guardonat amb el premi R.E. Moore. Aquest premi, instaurat l'any 2002, vol premiar la millor aplicació de les tècniques intervalars. Àlex Haro és professor del Departament de Matemàtiques i Informàtica de la UB mentre que J. Ll. Figueras, actualment a la Universitat d'Uppsala, és doctor per la UB.

- **David Beltran**, llicenciat en Matemàtiques per l'FME-UPC l'any 2012, ha estat un dels sis investigadors menors de 30 anys guardonats amb el Premi de Recerca Matemàtica Vicent Caselles 2018 que atorga la Reial Societat Matemàtica Espanyola i la Fundació BBVA. L'objectiu d'aquests premis és donar suport i estimular els joves professionals que desenvolupen la seva tasca en el camp de la investigació matemàtica. En la seva tesi doctoral, David Beltran va obtenir desigualtats amb pesos per a l'operador maximal de Carleson. Actualment és investigador postdoctoral en el projecte «Harmonic Analysis and Differential Equations», finançat per l'European Research Council. Beltran ha aportat resultats importants en el control d'operadors pseudodiferencials relacionats amb la classe de Hörmander per a funcions maximals. La cerimònia de lliurament va tenir lloc el dia 4 d'octubre de 2018, al Palacio del Marqués de Salamanca, seu de la Fundación BBVA.
- A la llista de revistes ordenades segons el seu factor d'impacte (JCR 2018), **Collectanea Mathematica**, amb un factor 1.035, s'ha situat en el primer quartil (63/309).
- **Eva Miranda** (UPC) ha estat un dels tres guanyadors del premi André Lichnerowicz 2018 sobre geometria de Poisson. Aquest premi internacional es concedeix a investigadors destacats en aquesta branca de les matemàtiques i que faci menys de vuit anys que han acabat el doctorat.

### Pensions privades i el retorn a les tontines, un invent de fa 300 anys

Montserrat Guillen

Riskcenter-IREA, Universitat de Barcelona

Al segle XVII, el banquer napolità Lorenzo de Tonti, va inventar un sistema d'estalvi per obtenir rendes vitalícies que encara avui es coneix arreu del món com a «tontina». Per poder-hi participar calia pagar una quantitat inicial i esperar un temps preestablert. Al final, i només al final, tots els diners més el seu rendiment es retornaven, però es repartien tan sols entre els supervivents. Els beneficiaris acabaven rebent una quantitat considerablement superior a la que havien invertit al principi, gràcies als interessos generats i, sobretot, pel fet que molts subscriptors ja havien mort i la seva aportació es dividia entre la resta.

Aquest producte financer era rudimentari però molt eficaç i va gaudir d'un èxit bastant notable no només a Itàlia, sinó també a Espanya, França i al Regne Unit. Els governs l'utilitzaven per finançar campanyes militars i així podien deixar per més endavant el pagament de les obligacions que havien contret. El perill era que, encara que es donés la garantia de l'Estat, es generava un deute públic que més tard anava enfonsant les economies dels respectius països.

Hi ha tres preguntes interessants en aquesta història: (1) per què van caure en desgràcia les tontines? (2) malgrat tenir tant mala premsa, com és que van passar als Estats Units i han arribat fins avui? i (3) ja que les pensions públiques venen a representar una mena de renda bàsica i les privades no donen prou rendiment, és possible que les tontines siguin la salvació de les nostres pensions?

Anem veient primer els orígens i la calamitat que eren les tontines de fa tres segles. Fixem-nos en l'estructura simplificada d'una tontina. Un regne amb les arques buides, encara que ja hagués esgotat la possibilitat de fer pagar més impostos als súbdits, podia organitzar una tontina i recaptar molt capital amb gran velocitat. La promesa de devolució anava acompanyada del compromís de gestió eficient del fons acumulat amb interessos i del pagament als

subscriptors encara vius en acabar l'operació. El guany més important venia del fet que el capital invertit es repartia entre un nombre d'inversors força més baix que l'inicial. A la pràctica, l'organitzador estava lluny de fer el seu paper perquè s'acabava gastant els diners, tan bon punt havia recollit el capital i, arribat el cas, ordenava una segona tontina per recaptar més diners i tornar el deute de la primera col·lecta, en una espiral sense fi.

Per part dels inversors, hi havia una certa picaresca. Es podia subscriure la tontina a nom de la persona més jove de la família per incrementar la probabilitat de sobreviure molts anys i acabar cobrant. Encara més, amb el pas del temps les tontines van ser detestades per tothom, perquè hi havia participants que no tenien cap escrúpol i assassinaven altres participants per tenir un botí més gran. Hi ha molta literatura de ficció sobre això i, fins i tot, un episodi de la famosa sèrie dels Simpson exemplifica les peripècies d'una tontina quan l'avi Simpson ha de ser el darrer supervivent d'un grup d'excombatents de la Segona Guerra Mundial per quedar-se amb una col·lecció d'art de gran valor.

L'arribada de les tontines al nou món no està exempta de glòria, ja que la primera seu de la Borsa de Nova York estava situada precisament a la Tontine Coffee House, a Wall Street. Moltes companyies asseguradores americanes comercialitzaven tontines al segle XIX i un cop més es van tornar a generar els mateixos problemes viscuts a les corts europees. Finalment, al 1905 les tontines van ser prohibides als Estats Units, perquè havien arruïnat molta gent. La seva prohibició es va desencadenar arran d'una fallida de dimensions titàniques orquestrada per un jove graduat de Harvard que es deia James H. Hyde i que ell tot sol va fer desaparèixer l'Equitable Life Assurance Society, una de les entitats d'assegurances més importants de l'època, en el que va ser el primer gran escàndol de Wall Street i en què ja hi ha

involucrats noms prou coneguts avui, com la banca JP Morgan. Resulta curiós que no s'hagi rodat una pel·lícula sobre aquest llegendari vividor que en un interval de tan sols cinc anys es va gastar tant l'extens patrimoni del seu pare com els estalvis dels assegurats, tot organitzant grans esdeveniments com un ball de disfresses al més pur estil de Versalles amb crònica al *The New York Times* inclosa.



Equitable Life Assurance Society, seu a Madrid (a la cantonada dels carrers Sevilla i Alcalà), Fotografia cedida pel Museo del Seguro, Fundación Mapfre

A la Unió Europea, i precisament a França, on es va refugiar més tard el perillós exmultimilionari americà, les tontines van mantenir-se a resguard dels cobdiciosos, van perdurar i són instruments que s'han mantingut en plena vigència. En la directiva comunitària de l'any 2002 sobre assegurances de vida, es preveuen les operacions tontines, definides com «aquelles associacions que reuneixen participants per capitalitzar en comú les seves aportacions i per repartir l'actiu entre els supervivents o entre els hereus del que ja no hi són». Per tant, les tontines són, encara avui, operacions

completament legals al vell continent europeu.

Des d'un punt de vista matemàtic, l'inici de la formalització moderna de les tontines se la disputen diversos grups, que no sempre han fet servir la mateixa nomenclatura i notació. Majoritàriament, treballen sobre la base d'un dels articles més fonamentals per entendre el paper de les pensions privades. Aquest article, publicat al *Review of Economic Studies*, l'escriu al 1965 Menahem E. Yaari, avui professor emèrit de la Universitat Hebrea de Jerusalem. Es titula «Uncertain Lifetime, Life Insurance, and the Theory of the Consumer» i ve a dir que el principal obstacle per constituir una renda o una pensió privada és no saber quant temps de vida queda. Si el temps és fix i conegut,  $T$ , aleshores es pot obtenir un consum admissible  $c(t)$ , no negatiu en cada moment  $t$ , sempre que es compleixi:

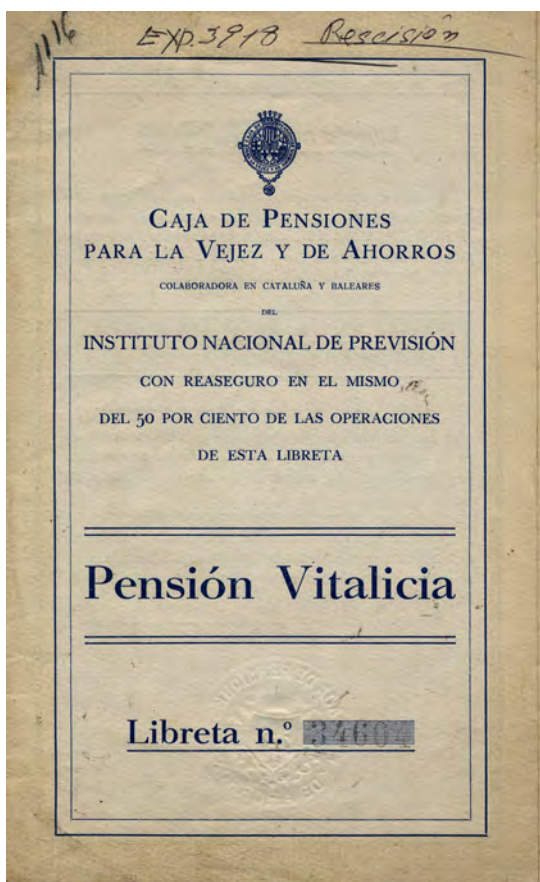
$$\int_0^T \left\{ \exp \left[ \int_t^T j(x) dx \right] \right\} \{m(t) - c(t)\} dt = 0,$$

on  $j(x)$  és el tipus d'interès positiu a l'instant  $x$  que donarà lloc a un rendiment del capital acumulat fins aquell moment i  $m(t)$  denota els ingressos en  $t$ . En paraules planeres, l'anterior expressió significa que els diners que es guanyen es poden anar consumint al llarg del temps i aquells que no es gasten creixen segons un tipus d'interès i permeten crear un excedent per al consum posterior, és a dir, per quan no hi ha ingressos.

La fórmula inicial de Yaari no preveu que hi hagi més d'un pensionista i primer suposa que la durada de la vida és coneguda. L'article després introdueix l'aleatorietat a la durada de la vida i constata que s'ha de suposar una llei de mortalitat, és a dir, una distribució de probabilitat per a la variable aleatòria  $T$ . Per trobar  $c(t)$  es restringeix a tenir sempre un capital acumulat no negatiu, cosa que vol dir que en definitiva no admet que algú s'endeuti per gastar diners. Arribat a aquest punt, Yaari defineix el tipus d'interès actuarial, que és superior al de mercat perquè reflecteix el fet que no tothom sobreviu per cobrar un rendiment, sinó que només poden cobrar interessos els vius. Per això, es reparteixen també els rendiments que deixen de cobrar els difunts. Exactament el mateix principi que hi havia a les tontines. L'article de Yaari esdevé més complex perquè també preveu que la persona, a



qui ell anomena «el consumidor», vulgui deixar part de la seva riquesa als hereus. Intueixo que mogut pels corrents de l'època que encara perduren actualment a certes escoles d'economia teòrica i que no han reduït la seva capacitat d'influir en la recerca més ortodoxa d'aquesta disciplina, Yaari troba no només una, sinó dues possibles solucions generals per al consum òptim, invocant també dues de les infinites versions del concepte d'utilitat de la riquesa. L'article de Yaari és un clàssic, infravalorat per alguns, massa crític per a uns altres però una referència que ha perdurat amb el pas dels anys amb poc més de tres mil cites i massa lluny d'altres icones del Google Scholar.



Llibreta de pensió vitalícia del 1930 per a un beneficiari que aleshores tenia 10 anys i cobraria a partir dels 65, Fotografia cedida pel Museo del Seguro, Fundación Mapfre

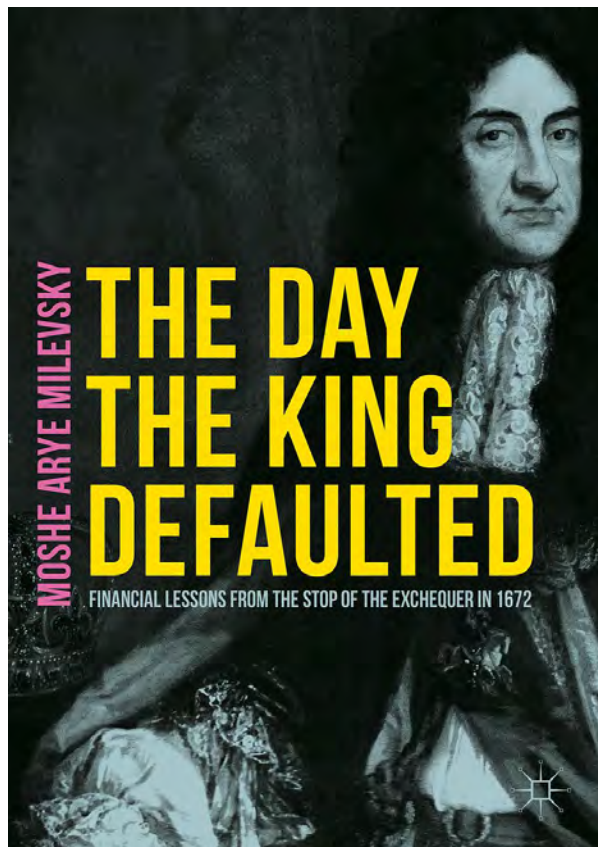
A principis del segle XXI hem viscut una eclosió de la innovació en matèria de pensions, que encara no és al mercat perquè el sector de les assegurances de vida i pensions privades és summament conservador. Amb l'esperança que potser arribin a llegir aquestes línies, recomanaria que certes entitats pareixin l'orella

a les noves fórmules de pensions que sorgeixen arreu del món, i són força més a prop del que creuen. La renovació de les pensions privades comença l'any 2005 liderada per investigadors d' Austràlia i rep el nom de GSA, *group self-annuitization*. En aquest nou sistema els participants comparteixen els seus estalvis o els seus fons de pensions i els inverteixen de forma coordinada, amb una mateixa estratègia. El repartiment no arriba tard com passava a les tontines primitives, sinó que es fa anualment. La pensió anual que rep un subscriptor és directament proporcional al rendiment de la seva inversió i a la mortalitat experimentada pel col·lectiu. Res està assegurat, però no s'han de pagar comissions ni primes de longevitat, la qual cosa per si sola ja pot arribar a significar al voltant d'un diferencial del 5% anual respecte a les pensions vitalícies, que són els productes clàssics. El plantejament australià topa amb la restricció que els participants han de tenir la mateixa cartera de valors, una edat semblant i el grup ha de ser tancat i gran.

Recentment, el lideratge d'aquesta recerca s'ha traslladat al Regne Unit. He tingut la sort de participar en aquesta segona vida de les tontines, en què s'ha donat pas a les noves formes de pensions que s'anomenen *pooled annuities*. Hem pogut solucionar el problema pràctic de l'heterogeneïtat d'edats dels participants dels fons, amb un repartiment de beneficis que està en funció del capital aportat inicialment i també de la probabilitat de mort de cada subscriptor. Així, les persones més grans reben una renda anual més alta que les més joves, al mateix temps que aquesta pensió també és proporcional a l'aportació de capital inicial, per tant, més alta per a aquells que inverteixen més diners al principi. També hem pogut fer que l'entrada i la sortida dels fons sigui sempre possible. En definitiva, ens trobem davant d'una actualització de les antigues tontines que es beneficia dels càlculs que podem fer avui dia i que fa anys no eren possibles.

No vull deixar d'esmentar un dels matemàtics que més ha influït en el desenvolupament i la divulgació de les tontines, el canadenc Moshe A. Milevsky, membre del Risk and Insurance Study Centre del Fields Institute a Toronto. Entre altres aportacions d'interès, Milevsky ha estudiat les tontines dels reis d'Anglaterra i documenta molt bé les seves

arrels anglosaxones. En el seu darrer llibre explica el dia que el rei Carles II d'Anglaterra va fer fallida. Sembla que va ser al 1672, la primera i l'última vegada que la corona anglesa va deixar de pagar els seus creditors. Van caure els principals banquers, que també van deixar de pagar, i va començar una de les crisis econòmiques més monumentals de la història.



Fotografia cedida per Moshe A. Milevsky

En aquest recorregut, les tontines ens han conduït a mals records de temps passats, amb vides agitadaes i fortunes dilapidades, però també ens han retornat amb noves fórmules que poden solucionar els dilemes de l'estalvi privat.

El cas de la pensió pública espanyola és molt diferent. No passa de ser una assegurança obligatòria que se sosté amb les cotitzacions dels treballadors de cada moment i que actualment va a la deriva. L'únic camí realista és endarrerir l'edat de jubilació o bé, per fer-ho menys traumàtic, deixar que es pugui cobrar la pensió i seguir treballant. El factor de sostenibilitat de les pensions espanyoles del 2013 que moderava els augments només va ser un miratge concebut més que res per acontentar la ministra. Era una eina grollera i incorrecta des d'un punt de

vista matemàtic, que finalment ha caigut per la pressió social.

En aquesta situació, reivindicar les noves formes de tontina per a l'estalvi privat és equivalent a buscar la màxima rendibilitat, amb la inversió dels estalvis de forma autosuficient i amb idees més modernes que superen la carcassa de les rendes vitalícies. Algunes entitats asseguradores europees ja són ben a prop de la línia de sortida per comercialitzar aquests principis i treure'n algun partit. Les tontines rebran altres noms, i tindran alguna lletra petita que convindrà llegir-se bé, però amb completa seguretat seran instruments d'èxit per a aquells que hagin pogut estalviar un mica, sobretot perquè eviten el cost de cobrir el risc de viure molts anys, que sol estar sobreassegurat o calculat amb marges massa amples. A més, com ja s'ha dit, les rendes obtingudes amb una tontina moderna ara també són vitalícies, només han de pagar impostos per la part dels interessos i de manera estructural s'incrementen amb l'edat. Fins i tot es pot pactar que part del capital residual vagi a parar als hereus. Les bases ja fa més de tres segles que estaven inventades, però ara amb les noves tontines sobreviure és un al·licient i té premi.

## Referències

- [1] C. Donnelly, M. Guillén, & J.P. Nielsen, «Exchanging uncertain mortality for a cost». *Insurance: Mathematics and Economics* 52 (2013), núm- 1, 65–76.
- [2] C. Donnelly, M. Guillén, & J. P. Nielsen, «Bringing cost transparency to the life annuity market». *Insurance: Mathematics and Economics* 56 (2014), 14–27.
- [3] M. Guillén, P. L. Jørgensen, & J. P. Nielsen, «Return smoothing mechanisms in life and pension insurance: Path-dependent contingent claims». *Insurance: Mathematics and Economics* 38 (2006), núm. 2, 229–252.
- [4] M.A. Milevsky, *King William's Tontine: why the retirement annuity of the future should resemble its past*. Cambridge University Press, (2015).
- [5] M.A. Milevsky, *The Day the King Defaulted*. Palgrave Macmillan, (2017).

- [6] J. Piggott, E. A. Valdez, & B. Detzel, «The simple analytics of a pooled annuity fund». *Journal of Risk and Insurance* 72 (2005), núm. 3, 497–520.
- [7] M.E. Yaari, «Uncertain lifetime, life insurance, and the theory of the consumer». *The Review of Economic Studies* 32 (1965), núm. 2, 137–150.

## L'impacte de les reformes educatives en l'ensenyament de les matemàtiques

Manel Sol Puig

Professor de secundària, professor associat UB, jubilat. Membre del grup Viltazara

En aquest article es presenten algunes reflexions sobre l'evolució de l'educació matemàtica a través de les darreres reformes educatives. Intentaré respondre a preguntes com ara què es pretenia?, què s'ha aconseguit en cada ocasió?, què han resolt?, quins nous reptes ens han plantejat? El que presento són reflexions fetes des d'una doble perspectiva, la que em dona el temps que ha transcorregut des d'aleshores fins a dia d'avui i la que em dona la meua trajectòria professional en la qual he viscut aquests canvis com a professor de secundària, com a formador de professors de secundària i de mestres i com a professor associat a la facultat de formació del professorat de la UB.

Faré una descripció dels trets generals que caracteritzen l'ensenyament de les matemàtiques de la Ley General de Educación (LGE) anomenada llei Villar Palasí (1970) en reconeixement al ministre responsable de la seva elaboració. A continuació, analitzaré els canvis estructurals i curriculars de les altres lleis a excepció de la LOCE, que no va arribar a aplicar-se perquè hi va haver un canvi de govern.

### Ley General de Educación

La reforma de les matemàtiques que proposa la Ley General de Educación (LGE) mostra una forta influència de la que ja s'havia portat a terme a França i altres països a la dècada dels seixanta, basada en el que es coneix com les Matemàtiques Modernes (*New Mathematics*) caracteritzades pel formalisme i estructuralisme. La referència per aquests plantejaments era el grup de professors francesos sota el pseudònim de *Bourbaki*.

Poc després de la seva aprovació al Parlament espanyol, a la resta del món ja s'estaven posant en qüestió els principis en què es basaven les matemàtiques modernes. Per exemple, al segon Congrés Internacional d'Educació Matemàtica celebrat a Exeter al 1972 hi va haver intervencions molt crítiques com la de R. Thom a la seva conferència «Modern Mathematics: does it exist?». També és d'aquesta època el llibre de Klein (1976) on es feia una crítica important a les *New Mathematics*.

Rico (2007) justifica aquesta falta de coordinació entre el que passava a Espanya i a la resta del món d'aquesta manera:

«Con carácter general, podemos afirmar que los esfuerzos de la sociedad española durante estos años por integrarse en el marco europeo y por superar el atraso científico y cultural hacen que muchas innovaciones curriculares se reciban acríticamente y traten de incorporarse a nuestro sistema educativo, sin reflexión propia ni análisis previo sobre la conveniencia de su adaptación a nuestras necesidades específicas. Esto es lo que ocurrió con el programa de las Matemáticas Modernas».

Algunes característiques del que es proposava per a les diferents etapes són:

1. A l'etapa 12–14 anys (EGB segona etapa, actuals 6è de primària, 1r i 2n d'ESO) els continguts estaven centrats en la construcció i estudi de l'estructura dels conjunts numèrics  $\mathbb{Z}$  i  $\mathbb{Q}$ , la iniciació a l'estudi algebraic de les relacions i funcions, representacions gràfiques i equacions, estudi de les magnituds: longitud, amplitud, superfície i volum amb especial



èmfasi en les seves estructures algebraiques i a les relacions de proporcionalitat entre magnituds, algun tema de geometria sintètica amb una geometria de l'espai i una breu introducció a l'estadística. Per exemple, a setè es plantegen com a objectius el maneig de les estructures de grup i anell, soltesa en la resolució d'equacions de primer grau. A vuitè, l'estructura de cos i la construcció rigorosa de  $Q$ , concepte de funció, funcions polinòmiques i en especial les quadràtiques, resolució d'equacions de primer i segon grau amb una incògnita i coeficients racionals. Aquests programes van estar vigents fins al 1992, quan van ser substituïts pels seus programes de la LOGSE (Decret 96/1992).

2. A l'etapa 15–17 (Bachillerato Unificado Polivalente - BUP- actuals 3r i 4t d'ESO i 1r batxillerat) el currículum de matemàtiques era una continuació natural del que hem comentat abans de la segona etapa de la EGB, mantenint el seu caràcter formalista i estructuralista. Es feien 5 hores setmanals de matemàtiques a primer i 4 hores a 2n i 3r. El currículum va ser publicat al Decret de 23 de gener de 1975 (BOE 13-II-1975), que aprova el pla d'estudis del batxillerat i l'Ordre ministerial del 22 de març de 1975 (BOE 18-IV-1975) on apareix el currículum. A les orientacions es pot constatar el fort caràcter formalista que se li havia de donar. Està formalment vigent fins a la seva substitució el curs 1996–1997 pels nous programes derivats de la LOGSE (Decret 82/1996). El primer i segon curs eren obligatoris i el tercer optatiu. Si mirem els currículums observarem una orientació al càlcul, a l'operativa, a la resolució d'equacions i als processos mecànics.
3. Al COU es feien 4 hores setmanals de matemàtiques. Hi ha dues opcions, les matemàtiques I i II segueixen les orientacions dels anteriors cursos.

El currículum de la llei del 70 s'ha impartit durant 22 anys i la seva influència en la manera d'entendre les matemàtiques, i el que significa saber matemàtiques, arriben fins als nostres dies. Molts professors que van haver de començar a impartir la LOGSE, la LOE o

LOMCE i alguns dels quals amb responsabilitats en l'organització i gestió dels centres van ser formats en aquest sistema de la LGE.

Les principals crítiques que ha rebut l'educació secundària de la LGE són que els alumnes no entenen els conceptes matemàtics i la seva alta taxa de fracàs escolar. A Rico (2007) es cita Bosch i Díaz (1988), que diu que el 35% dels estudiants no obtenen el títol de graduat escolar quan acaben l'EGB. Dels que sí que l'obtenen només el 75% inicia batxillerat i d'aquests només el 50% conclouen el batxillerat en tres anys. Això vol dir que de 100 alumnes que inicien l'EGB uns 24 alumnes obtindran el batxillerat en els terminis establerts.

En l'informe de la UNESCO (1979) *Nuevas tendencias en la enseñanza de las matemáticas* es recullen les principals crítiques a les reformes d'orientació bourbakista: a) fetitxisme del pensament conjuntista b) abstraccions estèrils, no justificades per les seves aplicacions i sovint concretades erròniament c) llenguatge pseudo erudit carregat de símbols i terminologia d) fetitxisme del mètode axiomàtic e) fetitxisme del rigor, que a la pràctica real de l'escola es transforma en una pedanteria inútil f) oblit de la realitat física com a fonts d'idees matemàtiques i en particular oblit de l'espai físic com a font de la geometria g) oblit de la visió global basada sobre les intuïcions espacials en benefici del pensament algorítmic de l'àlgebra formal.



## LOGSE

A partir del 1975 hi ha canvis polítics i socials que influiran en el món educatiu i faran necessària la seva adequació. En els canvis



polítics hem de referir-nos principalment a la fi de la dictadura, l'aprovació de la Constitució del 1978 i al traspàs de competències en matèries educatives a les comunitats autònomes. En el món social va haver un esclat de moviments de participació ciutadana que buscaven la democratització a tots els àmbits de la societat i que també es van reflectir en el món de l'educació.

Només vull destacar dos trets que caracteritzen el moment en què es planteja la LOGSE. D'una banda, les inquietuds del professorat i, de l'altra, l'informe Cockroft (1982), que va tenir un gran impacte en tot el món i la influència del qual podem reconèixer en la LOGSE.

En aquests anys, el professorat tenia consciència de les necessitats de canvis i va emprendre iniciatives de millora de l'ensenyament. Podem destacar el Grup Zero de Barcelona, que va elaborar i publicar propostes per a l'aula que deixaven de banda el formalisme dominant del currículum oficial. Van elaborar materials adreçats al professorat per fer servir a l'aula, així com la impartició d'activitats de formació. Moviments similars es poden trobar a la resta de l'Estat espanyol. És destacable que al maig del 1981 es van celebrar a Barcelona les primeres Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM). En el comunicat final podem llegir «La necesidad de una reforma profunda de los programas de Matemáticas en los diversos niveles, que sólo será fructífera si nace de una discusión y participación activa del profesorado afectado...»

L'informe Cockroft és el resultat de l'encàrrec que el Parlament britànic fa al seu govern per investigar quin és l'estat de l'ensenyament de les matemàtiques a Anglaterra i Gales i presenta orientacions de millora. Va tenir un gran impacte a escala mundial i com veurem també va influir en la LOGSE. Es plantegen qüestions com ara quines matemàtiques han d'aprendre els alumnes?, com han d'ensenyar-se?, com influeixen els exàmens?, com s'ha d'actuar davant d'alumnes amb diferents capacitats?, com es pot donar sentit a les matemàtiques?, com han de ser els currículum?, quin tipus de tasques són necessàries per a l'aprenentatge de les matemàtiques?, quins enfocaments i mètodes d'ensenyament s'han de

fer servir? Ja emfatitzen la importància de la comprensió, que suposa la capacitat de fer ús d'un concepte matemàtic en una gran diversitat de contextos alguns dels quals no són en absolut els habituals (paràgraf 231), treballs pràctics per assegurar la comprensió (paràgraf 232). Tot i ser publicat el 1982 (1985 en l'edició en castellà) encara avui resulta vigent en molts aspectes.

Abans de l'aprovació definitiva de la LOGSE, el Ministeri d'Educació va publicar, al 1989, el *Libro blanco para la reforma del sistema educativo* i va fer una fase d'experimentació i avaluació. Finalment, la LOGSE va ser aprovada el 3-10-1990 (BOE del 4-10-90).

La LOGSE no és una reforma que canvia els temes que s'havien d'ensenyar per uns altres, o que modifiqui el moment quan s'havien d'ensenyar. Perquè si fos així hauria estat molt fàcil i no hauria creat tanta polèmica. Si ens haguessin dit que ara s'ha d'explicar la teoria de grafs a 1r de batxillerat, per exemple, o matemàtica financera a 4t d'ESO en el primer trimestre de curs. Doncs no hauria creat la polèmica que es va donar. L'arribada de la LOGSE va ser una forta sacsejada a l'ensenyament d'aquest país. Exigia canvis de paradigma, fent servir els termes de Khun, que anaven a afectar a l'estructura del sistema educatiu i al currículum. La proposta acabaria modificant el concepte del que és saber matemàtiques, del què s'havia d'aprendre, i el com s'havia d'aprendre. Sense fer aquest canvi de paradigma difícilment el professorat podria ensenyar les matemàtiques que es demanaven. Calia formar al professorat en aquests nous referents i això significava temps. Però tampoc es podien tancar les escoles i els instituts del país durant un any per preparar el professorat. És a dir, malgrat tots els problemes que suposava, la manera de fer-ho era com es va fer i ja se sabia que s'entenia com un procés de canvis progressius durant un període de temps llarg. En aquest temps hi hauria friccions i conflictes.

Per tal d'organitzar les idees el que farem és una anàlisi dels canvis estructurals d'una banda; i, de l'altra, dels canvis curriculars que s'enuncien a la taula.

Canvis estructurals	Canvis curriculars
1. Redefinició de la formació professional	1. Objectius
2. Allargament de l'obligatorietat de l'ensenyament fins als 16 anys	2. Continguts
3. Inici de l'etapa secundària a partir dels 12 anys	3. Metodologia
4. Inclusivitat a l'etapa obligatòria (12-16 anys)	4. Fonamentació psicològica de l'aprenentatge. El constructivisme
5. Complexitat organitzativa. Es parla d'àrees i crèdits. Ensenyaments comuns i optatius.	5. L'avaluació
6. A primer cicle (12-14 anys) es fan 4 crèdits de matemàtiques (1 crèdit equival a 35 hores lectives)	
7. A segon cicle (14-16 anys) de matemàtiques es fan 4 crèdits més un optatiu obligatori	

### Canvis estructurals

Dels canvis estructurals presentats a la taula anterior destacaria els dos que a la pràctica van resultar més polèmics: el nombre d'hores destinades a l'ensenyament de les matemàtiques i la inclusió de tots els alumnes.

- **Hores lectives:** La matèria s'organitza en crèdits comuns i crèdits variables. S'ha d'entendre que un crèdit signifiquen 35 hores lectives. Hi ha un fet objectiu, que és la reducció important de les hores destinades a matemàtiques al llarg de tot el curs ja que al primer cicle 1r i 2n d'ESO tenen dos crèdits comuns que equivaldrien a dues hores obligatòries a la setmana. La idea era que a través dels crèdits variables els alumnes podien completar el seu itinerari i fer més hores dedicades a les matemàtiques amb uns continguts adaptats a les seves necessitats. Per a uns serien ampliacions o aprofundiments, per a altres consolidació i per a uns altres reforç. S'ha de dir que les ràtios dels crèdits variables estaven previstes a 20 alumnes, quan els grups de classe ordinari eren de 30.

S'ha de reconèixer que canviar de crèdits variables cada trimestre suposava un sobre-esforç als equips de direcció dels centres però que es va arribar a portar força bé. Una altra qüestió era com assegurar que l'alumne cursés el crèdit variable que realment necessitava fer. No sempre passava que el crèdit que necessitava l'alumne coincidia amb el que

ell volia fer, perquè igual que s'oferaven CV de matemàtiques s'oferien d'altres tipus com artístic, esports, informàtica, etcètera, que per a molts alumnes resultaven més atractius que els de matemàtiques. Però quan s'arribava a acords es podia donar el cas que finalment no ho pogués fer per manca de places. Al final hi podia haver alumnes que es quedessin només amb les dues hores setmanals, mentre que d'altres en feien cinc hores durant dos trimestres i tres en el tercer, en el cas de cursar un CV de matemàtiques cada trimestre, tot i que això no era gaire habitual.

- **Inclusivitats 12–16:** La inclusió de tots els alumnes va crear molta polèmica. Si bé la idea de la integració és socialment un progrés, a la pràctica va resultar molt difícil i encara avui en dia continua sent un tema que no s'ha acabat de resoldre. Per al professorat va suposar un canvi d'escenari important. Amb la implantació de la LOGSE va canviar força l'escenari del professorat. El ventall de casuístiques a les quals s'enfrontaven es va fer més ampli mentre que els seus recursos personals eren més o menys els mateixos. A més, el sistema feia prioritari atendre'ls a tots.

A escala social, es va arribar a generar la idea de desordre i baixada de nivells i es va perdre la perspectiva de l'important valor social i educatiu que representa la integració de tot l'alumnat de 12 a 16 anys a les aules i de la nova manera d'enfocar la matèria.

Amb la perspectiva que ens dona el temps que ha passat des d'aleshores, considero que la inclusivitat no era gens fàcil però posar en qüestió la integració a les aules no era l'alternativa sinó que el que s'havia de fer era reclamar més formació per als docents i més recursos per als centres. Avui ja sabem que és això el que passa a altres països més desenvolupats i que obtenen millors resultats acadèmics que el nostre, la qual cosa ens confirma que la integració no ha de significar una baixada de nivell.

### Canvis curriculars

S'estableix que el currículum és el conjunt d'objectius, continguts, mètodes pedagògics i criteris d'avaluació (art. 4 LOGSE). El seu desenvolupament a Catalunya es va fer segons el Decret 96/1992, de 28 d'abril. S'introduïa un vocabulari nou, ampli i feixuc, que no ajudava a comprendre l'abast dels canvis.

El currículum establia tres nivells de concreció. El primer era prescriptiu i estava establert al decret esmentat. En aquest primer nivell els continguts es presentaven desglossats en conceptes (fets, conceptes i sistemes conceptuals), procediments i actituds (valors normes i actituds). En això es pot veure una adaptació de l'informe Cockroft (paràgrafs 240 i 241). Això respon a una organització cognitiva atenent a la manera d'aprendre i no a una organització conceptual de la pròpia matèria com passava a la LGE. Es presentaven en forma de llista d'enunciats molt generals sense especificar ni quan s'havien d'impartir ni en quin ordre s'havien d'impartir. Aquestes concrecions les decidia el professorat en el segon i tercer nivell de concreció. El segon nivell significava la selecció, l'ordenació i la temporalització dels continguts establerts al primer nivell. El tercer nivell de concreció precisa de manera detallada el què, com i quan ensenyar i avaluar. És la concreció a l'aula de l'organització del segon nivell.

A continuació analitzem aquests elements del currículum.

- **Objectius:** Es fixen nou objectius generals i 51 objectius terminals. Els primers descriuen una matemàtica instrumental i funcional. Els segons seran útils per a l'avaluació, detallen fins a quin grau d'aprofundiment

s'han d'estudiar els continguts i quin tipus d'aprenentatge s'ha de fer. Contrasten força amb el model anterior de la LGE del 70, en què la matemàtica tenia un enfocament estructural i en part instrumental. El professorat podia trobar alguna dificultat per identificar les diferències entre l'un i l'altre i les implicacions que es desprenien a l'hora de estar a l'aula.

- **Continguts.** En el cas de la LGE, els continguts estan seleccionats d'acord amb la l'àrea matemàtica corresponent, i pretenen que els alumnes coneguin i aprofundeixin en el formalisme matemàtic sense fer cap concessió a la funcionalitat d'aquests continguts ni a cap altra consideració. En el cas de la LOGSE, els continguts estan orientats a la funcionalitat. Tal com diu el primer nivell de concreció curricular elaborat pel departament, la selecció de continguts s'ha fet perquè «els alumnes els puguin incorporar al seu llenguatge habitual, que els permetin afrontar situacions problemàtiques del seu entorn i que els ajudin a interpretar i elaborar informació referent a la realitat social actual i a altres àrees de coneixement». Atenent a les diferents fonts del currículum, els coneixements matemàtics s'han triat pensant en els que la societat actual exigeix a qualsevol ciutadà, que no siguin gaire abstractes i permetin un treball manipulatiu i un procés empíricoinductiu en el raonament, els que permeten un aprenentatge significatiu i funcional. Com que també es vol que sàpiga aplicar els coneixements de manera creativa, s'ha donat prioritat als aprenentatges procedimentals. Aquesta idea torna a mostrar la influència de l'informe Cockroft «Un principio fundamental, a nuestro parecer, es el de no incluir ningún tema que no pueda desarrollarse hasta el punto de que su aplicación resulte comprensible para los alumnos (paràgraf 541)».

Des d'un punt de vista conceptual de la matemàtica, sí que hi ha molta diferència entre els continguts proposats a la LGE i els de la LOGSE. Per comprendre-ho s'ha de tenir present que les finalitats d'uns i altres també canvien enormement. Per tant, si algú busca els continguts que apareixen a la LGE en el decret de la LOGSE ni els trobarà tots ni els que trobi estaran tractats amb el

mateix grau d'aprofundiment, si només tenim en compte criteris epistemològics. Però fixar-se només en aquesta qüestió és no adonar-se del que es pretén en l'educació en general i en la matemàtica en particular. D'aquí ve una de les polèmiques que ha arrossegat la LOGSE, que és la caiguda del nivell.

Els continguts de batxillerat eren una continuació natural dels continguts de l'ESO.

- **Metodologia.** Tal com es diu al currículum editat per la Generalitat de Catalunya (1993), «el marc curricular per a l'ensenyament obligatori es recolza en una concepció constructivista de l'aprenentatge escolar». Quin abast té aquesta opció per al professor?, quines implicacions té sobre el que ha de passar a la seva aula? Creiem important dedicar un espai a aquesta qüestió per poder comprendre bona part dels canvis metodològics que es reclamen des de la LOGSE.

El model d'ensenyament que es feia servir durant la vigència de la LGE era el model transmissiu en el qual el professor transmet tots els resultats matemàtics establerts, a l'alumne se li presenta tot resolt de manera coherent i ordenada. Normalment segueix l'ordre de definicions, propietats i regles, exemples i exercicis per practicar. Durant la classe l'alumne escolta, memoritza i practica amb exercicis similars als presentats pel professor. El paper de l'alumne és passiu i al final ha de superar un examen en el qual ha de resoldre uns exercicis similars als que s'han fet a classe. Saber matemàtiques és memoritzar i aplicar regles. La situació més habitual que es viu a classe és la del professor xerrant i explicant i els alumnes callats i apuntant. No hi ha cap plantejament psicològic, la interpretació que es fa és que si el professor ha fet la seva part de feina ben feta i l'alumne no ho aprèn, la responsabilitat està de la banda de l'alumne.

En canvi, el constructivisme explica que l'alumne aprèn establint connexions entre el que ja sap i el que tracta d'aprendre. Això té implicacions directes per a l'aula ja que exigeix un paper actiu de l'alumne perquè ha de mantenir la activitat mental d'establir relacions; aquest és un procés individual d'aprendre i cadascú fa el

seu i, per tant, és únic. No hi haurà dos alumnes que facin les mateixes relacions ni el mateix procés.

Aquest plantejament és radicalment diferent del model transmissiu de la LGE i obligarà el docent a replantejar-se la seva intervenció a l'aula. Per això al currículum es recomana afavorir les activitats de caràcter experimental, de manipular, de recerca, que els alumnes expliquin i justifiquin el que fan. S'ha de fer veure la funcionalitat dels aprenentatges, de manera que se'ls haurà de proposar treballar en contextos i situacions molt diferents. A les orientacions didàctiques es demana expressament prioritzar els aprenentatges experimentals de caràcter inductiu per davant dels de caire deductiu. A la pràctica això significa que les classes ja no han de seguir el patró tradicional, sinó que és important saber quins són els coneixements previs dels alumnes i proposar una tasca perquè els alumnes puguin començar a establir relacions i construir el coneixement. Per això, les lliçons han de començar proposant activitats d'investigació, experimentació o manipulació per arribar al final de la seqüència a les definicions i propietats.

És evident que a l'alumne li resulta més complexa i difícil la presentació més formal que la que es fa en el segon cas. De la mateixa manera que al professorat li representa menys esforç fer la seva feina en el primer cas.

Per ajudar el professorat, des del Departament d'Ensenyament es van proposar exemples de segons nivells de concreció i de llibres de text com va ser el *Bon dia, Mates* (BDM) elaborat per C. Alsina, J. Giménez i J.M. Fortuny. El BDM va ser un llibre innovador, que no estava pensat perquè el professorat anés seguint per ordre els exercicis que es proposaven. El seu ús exigia al professorat un estudi previ per decidir la seqüència que faria. Per això, al començament es presentava un esquema (Com ho farem?) el qual de manera esquemàtica s'explicava com portar-ho a l'aula. El projecte era prou flexible perquè els professors poguessin dissenyar diferents seqüències per als seus alumnes. Aquest plantejament era força coherent amb els principis constructivistes del nou currículum. Aquest material anava acompanyat d'un al-



tre volum amb material per al professorat en el qual s'explicaven els objectius que es proposaven, donaven orientacions per portar a l'aula, i guies per a l'avaluació. També feien suggeriments per atendre la diversitat amb propostes d'itineraris. Al final s'oferien materials i recursos retallables o fotocopiabls per preparar activitats per experimentar, construir, jugar.

Plantejava cada unitat didàctica a partir d'unes activitats inicials contextualitzades. Seguien unes activitats de desenvolupament amb problemes, investigacions i projectes. Al final del crèdit hi havia unes activitats d'avaluació que preveien l'observació diària, treballs, fitxes d'autoregulació, realització de controls i la realització d'un projecte. En part aquesta proposta fa una adaptació de les propostes de l'informe Cockroft sobre què ha d'incloure l'ensenyament de les matemàtiques (paràgraf 243). Realment va ser una proposta trencadora en relació amb el llibre de text tradicional.

En aquells moments el BDM resultava massa innovador, i a més requeria prèviament molta preparació i reflexió per part dels docents que tenien poc temps per fer-ho. Els reptes que se'ls plantejaven eren enormes i la inseguretat al principi també. Aquest material va arribar a tots els centres de secundària però crec que molts pocs professors el van fer servir.

El departament també va elaborar una àmplia oferta de crèdits comuns i variables ja preparats per portar-los a l'aula. Les editorials també van fer continguts propis, que quedaven en un punt entremig entre el que eren els tradicionals de la LGE i el BDM. S'hi podien observar canvis importants, en el seu contingut i en com l'organitzava. Ja no començaven primer per la teoria i les definicions per després seguir amb problemes, sinó que proposaven activitats per pensar, per experimentar i després ja presentaven problemes per resoldre i, finalment, construïen la teoria.

A més, el departament va portar a terme un ampli pla de formació del professorat que va durar uns quants anys. Però malgrat tota la formació que es va impartir del departament i dels materials que es van fer arribar als centres, quan el professor entrava a l'aula

apareixien molt problemes imprevistos que el professorat havia de resoldre.



Un segon canvi important, que tampoc resultava fàcil d'aplicar d'un dia per l'altre, era la gestió d'aquests tipus d'activitats a l'aula. S'ha de dir que resulta força difícil per a un professor, acostumat a impartir classe fent un discurs coherent dirigit als alumnes que escoltaven callats, crear una dinàmica on els alumnes comencen una unitat per fer una experiència en algun context conegut, pensar sobre els resultats i treure conclusions. Per tant, això implica que el professor ha d'interactuar amb els alumnes fent un guiatge indirecte a fi que l'alumne avanci i arribi a poder treure conclusions de l'activitat. La transició del model LGE al model LOGSE exigia una reflexió al voltant de teories i mètodes d'aprenentatge que en alguns casos posava en qüestió les creences que la majoria teníem arrelades sobre el que eren les matemàtiques i el seu ensenyament. Aquest procés no es podia fer en una tarda llegint algun llibre o article, sinó que requeria temps, experiència i reflexió.

El professorat va necessitar temps per anar comprenent l'abast dels canvis que s'anaven introduint i anar millorant progressivament. S'ha de reconèixer que encara avui hi ha molts professors que s'enyoren de les matemàtiques que s'ensenyaven amb la LGE del 70.

- **L'avaluació.** En el model LGE l'avaluació estava orientada únicament a la certificació administrativa dels nivells de continguts assolits. En el model LOGSE, l'avaluació passa a convertir-se en un element més del procés

d'aprenentatge. Per tant, es modifiquen el per què volem avaluar i les maneres de fer. L'avaluació es converteix en un instrument d'ajuda a l'aprenentatge dels alumnes que es fa en tres fases. L'avaluació inicial, que té per objectiu assegurar l'adequació dels continguts que es volen impartir als coneixements que tenen els alumnes, qüestió important en un plantejament constructivista de l'aprenentatge. L'avaluació formativa, orientada a fer un seguiment del procés de l'alumne que ens informi de les dificultats, dels assoliments dels alumnes per poder estar a temps de modificar l'estratègia didàctica si fos necessari. Al final del procés, la que s'anomena «avaluació final», serveix per informar de com ha anat tot el procés i es puguin prendre decisions per a futures intervencions. Amb una mirada àmplia s'ha d'analitzar també el paper desenvolupat pel professorat, el temps, els materials, els documents, el grau d'interacció que ha fet servir, etcètera.

Aquesta manera d'avaluar no significa estar fent molts exàmens constantment, sinó dur a terme una recollida d'informació sistemàtica del treball d'aula, que es pot fer a través de mitjans diferents, com ara projectes, treballs d'aplicació, investigacions, resolució de problemes, la llibreta de classe, etcètera.

L'avaluació es fa complexa perquè el que es vol avaluar són els processos mentre fem matemàtiques i això ens exigirà activitats complexes que ens permetin obtenir les informacions que busquem.

Amb la mentalitat tradicional de demanar exercicis o problemes resultarà difícil, per exemple, identificar diferents tipus de raonaments, representacions, connexions, etcètera. La dificultat rau, per tant, a dissenyar un plantejament coherent entre el que volem aconseguir, què volem observar i les activitats que farem servir.

## LOE

Després de la LOGSE es va aprovar la Ley Orgánica 10/2002, de Calidad de la Educación (LOCE), el 23 de desembre de 2002, si bé no va arribar a aplicar-se ja que al 2004 el partit que l'havia elaborat va perdre les eleccions i el PSOE va tornar a governar.

Una de les primeres mesures que va prendre el partit socialista quan va recuperar el poder al 2004 va ser aturar el desplegament de la LOCE i va preparar una nova llei d'educació que va ser la Ley Orgánica de Educación (LOE).

A més de les necessitats polítiques del canvi també es van produir una sèrie de fets que van influenciar en l'aprovació de la nova llei d'educació. En destacarem tres que ens semblen rellevants. D'una banda, els treballs de la comisió DeSeCo de la OECDE, les proves PISA del 2003 centrades en les matemàtiques i les directrius de la UE que recomanaven a tots els països membres que orientessin els sistemes educatius cap a l'assoliment de les competències. Explicarem breument aquests fets.

- **Comisió DeSeCo.** Es tracta d'un projecte que va iniciar l'OCDE a finals de l'any 1997, per oferir un marc conceptual per a la identificació de les competències clau per a un ciutadà corrent que viu en una societat que es caracteritza pel canvi, la complexitat i la interdependència. Estava relacionat amb el programa PISA.
- **PISA 2003.** L'any 1997 l'OCDE va posar en funcionament el programa per a la Avaluació Internacional dels Estudiants (PISA, per les sigles en anglès). Estava orientat a fer un seguiment dels resultats dels sistemes educatius a partir del rendiment dels alumnes de 15 anys. Aquestes proves es fan cada tres anys. A l'edició del 2003 es va focalitzar en la competència matemàtica. Els resultats van ser:

Àrea	Catalunya	Estat espanyol	El millor	El pitjor	Mitjana OCDE
			Hong Kong	Brasil	
Matemàtiques	494	485	550	35	500

Es va considerar que aquests resultats posaven de manifest una baixa formació matemàtica dels joves espanyols de 15 anys.

- **Recomanacions de la UE.** Al diari oficial de la Unió Europea del dia 30/12/2006 es publiquen les recomanacions que el Parlament Europeu i el Consell fan als seus països membres sobre les competències clau per a l'aprenentatge permanent. Recomana als sistemes educatius que posin a disposició de tots els joves els mitjans per al desenvolupament de les competències clau per preparar-los per a la vida adulta. En un annex fixa les 8 competències clau entre les quals la número 3, que es refereix a «la competència matemàtica i competències bàsiques en ciència i tecnologia».

El Decret 143/2007, del 26 de juny, publicat al DOGC del 29/06/2007 estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria d'acord amb la LOE. Es plantegen canvis estructurals de menys importància com, per exemple, a quart d'ESO que se substitueix el crèdit de síntesi pel projecte de recerca, en comptes de crèdits variables tenen matèries optatives. Durant els primers tres cursos mantenen els crèdits variables. A la part comuna, ja no es parla de crèdits, sinó que es parla de matèries i de les hores setmanals que es dedica a cada una. En el cas de les matemàtiques passen a ser tres hores setmanals als quatre cursos. Als tres primers cursos tenen el primer i tercer trimestre de cada un dels cursos dues hores per a matèries optatives. Al segon trimestre tenen tres hores de matèries optatives. A quart tenen tres hores setmanals per les matèries optatives.

En l'àmbit curricular el fet més important és la incorporació de les competències com a eix vertebrador del currículum amb fortes implicacions en l'ensenyament de totes les àrees. Totes les matèries han de contribuir al desenvolupament de les vuit competències. Òbviament, des de l'àrea de matemàtiques hi ha una relació directa amb la competència matemàtica.

Al decret es fa una descripció de la competència matemàtica que significa: pensar matemàticament, raonar matemàticament, plantejar-se i resoldre problemes, obtenir, interpretar i generar informació amb contingut ma-

temàtic, utilitzar les tècniques matemàtiques bàsiques, intepretar i representar, comunicar als altres els treballs i descobriments.

Aquesta descripció és una adaptació amb poques diferències del que diu Niss (2002), o la versió original danesa de la reforma educativa traduïda a l'anglès a Niss & Hojgaard (2011), referència que val la pena consultar.

La definició de competència matemàtica no apareix al currículum però sí a Niss (2002) i Niss & Hogjaard (2011) i que ens resulta útil en el nostre cas: «Ser competent en matemàtiques significa posseir l'habilitat per comprendre, jutjar, fer i usar les matemàtiques en una varietat de contextos i situacions tan intra com extra matemàtics en els quals les matemàtiques tenen o poden tenir un paper».

Intentaré destacar algunes de les implicacions més rellevants de la presència de les competències al currículum en l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques.

- D'acord amb aquesta concepció, la competència matemàtica implica acció, és a dir, fer servir les matemàtiques en situacions reals per comprendre, interpretar i actuar per això diem que implica funcionalitat. D'aquí la importància dels contextos en el procés d'aprenentatge tal com s'indica al decret.
- Desenvolupar la competència vol dir que l'èmfasi de l'ensenyament no se centra a aprofundir el coneixement sobre un concepte, sinó a saber com fer-lo servir en un ventall ampli de contextos i situacions diferents, utilitzar els coneixements matemàtics amb més amplitud i aprofundiment. Per tant, millorar en una competència no vol dir necessàriament adquirir nous coneixements, sinó aprendre a fer servir els coneixements que ja es tenen i ampliar el ventall de situacions en les quals es fan servir.
- En aquest plantejament la modelització matemàtica té un paper rellevant. De fet, en el decret s'esmenta explícitament que «les capacitats que potencia el currículum de matemàtiques han d'ajudar l'alumnat a modelitzar situacions de la vida real i vinculades a d'altres àrees de coneixement i traduir-les a models matemàtics».
- S'ha d'entendre que les competències modifiquen i amplien el que s'entenia abans per

saber matemàtiques, el mateix que ja s'ha dit de la LOGSE, però ara d'una manera molt més pronunciada.

- L'assoliment de les competències és un procés a llarg termini que necessita concretar-se en petits objectius a curt termini. Fer aquesta feina no resulta senzilla per al professorat.
- S'ha d'ensenyar els alumnes a utilitzar de manera correcta els seus coneixements per resoldre problemes plantejats en contextos reals, no és realista esperar que ho sàpiguen fer per si mateixos, tal com ho expliquen Blum i Niss (1991).

Què implica per al professorat ensenyar matemàtiques en un marc competencial com el que estem presentant? Una bona resposta la trobem a Niss (2006). En primer lloc, el professor ha de ser competent en matemàtiques, això vol dir que poseeix la competència matemàtica. Però, a més, ha de tenir sis competències didàctiques, de les quals en destaco quatre:

- **Competència d'ensenyar.** Idear, planificar, organitzar, i portar a terme l'ensenyança de la matemàtica. Això inclou: la creació d'un ric espectre de situacions d'ensenyament-aprenentatge; trobar, avaluar, seleccionar i crear materials per ensenyar; inspirar i motivar els alumnes; analitzar el currículum i justificar les activitats d'E/A amb els alumnes.
- **Descobrir el progrés competencial de l'alumne.** Descobrir, interpretar i analitzar l'aprenentatge dels alumnes, així com les seves nocions, creences i actituds cap a les matemàtiques. Això inclou el desenvolupament individual de l'estudiant.
- **Avaluar la competència.** Identificar, avaluar, caracteritzar i comunicar els resultats dels aprenentatges i de les competències dels alumnes per informar i orientar l'alumne individualment i altres parts rellevants. Això inclou seleccionar, modificar, construir, analitzar críticament i implementar un conjunt variat d'instruments d'avaluació que serveixin per a l'avaluació formativa i sumativa.
- **Competència de desenvolupament professional.** Desenvolupar la pròpia competència com a professor de matemàtiques,

participar en activitats de desenvolupament professional (cursos, congressos) i estar al dia sobre les novetats i tendències sobre investigació i pràctica.

Aquestes competències didàctiques ens poden fer veure una bona part de la complexitat que suposa abordar l'ensenyament de les matemàtiques des d'una perspectiva competencial. Com es pot comprendre, no és gens fàcil adquirir-les per a un professor que no pot deixar d'atendre la seva aula.

La transició del model instrumental de la LOGSE al funcional de la LOE, tal com assenyala Rico i Lupiañez (2008), és «un proceso de considerable complejidad conceptual ya que no hay tradición sobre tareas, métodos y criterios de evaluación para este enfoque y además escasean los materiales para vehicular y dar forma a la riqueza cognitiva y al desarrollo que las competencias proponen alcanzar».

Crec que va costar força temps que el professorat s'adonés de l'abast dels canvis i de les implicacions que hi havia en aquesta proposta. En alguns casos, senzillament no es va arribar a entendre.

Seguirem el mateix model d'anàlisi que en els casos anteriors. Com que els canvis estructurals no van ser importants ens centrarem únicament en els canvis curriculars.

### Canvis curriculars

- **Objectius.** Podem observar un paral·lelisme amb els de la LOGSE però ara estan ampliat i destaquen l'orientació cap a l'aplicació i als diferents usos que es poden fer de les matemàtiques per analitzar, comprendre, actuar, comunicar, argumentar, raonar, calcular, modelitzar. Ja es marca, per tant, un salt cap a la competència matemàtica sense esmentar-la en cap moment.
- **Continguts.** A diferència de la LOGSE, els continguts no es presenten en tres categories de procediments, fets, conceptes i sistemes conceptuals i valors normes i actituds, ni tampoc s'estableixen tres nivells de concreció a partir dels quals el professorat havia d'elaborar el segon i tercer. Ara, els continguts es presenten organitzats per cursos i precedits pels quatre procediments que cal treballar per al desenvolupament de la



competència: resolució de problemes, raonament i prova, comunicació i representació i connexions. Com es veurà més endavant, aquests quatre procediments passaran a ser les quatre dimensions en què s'organitza la competència matemàtica en el desenvolupament del currículum a partir de la LOMCE.

Els continguts es presenten en els mateixos blocs que a primària, això és numeració i càlcul, canvi i relacions, espai i forma, mesura i estadística i atzar. Amb això el que s'està fent és una adaptació del plantejament de PISA, que en posar l'accent en les competències en remarca el caràcter funcional. En comptes de presentar els continguts de manera clàssica ho fa per àmbits on estan involucrats aquests continguts, i d'aquesta manera remarcar l'orientació del currículum cap a l'acció, cap a l'aplicació.

Es pot observar que l'estructura en què es presenten els continguts és una versió evolucionada dels que es proposaven al Decret 96/1992 que desplegava el currículum de la LOGSE i que ja apuntava cap aquesta direcció.

Entendre el plantejament competencial va costar molt tant al professorat com als creadors de materials didàctics. La resistència a abandonar les antigues creences sobre les matemàtiques i el que és aprendre i saber matemàtiques van ser molt forta. Aquesta oposició es pot veure en els llibres de text. Molts dels de 2n i 3r d'ESO incorporaven diferents lliçons dedicades als polinomis, les seves operacions, teorema del residu, arrels d'un polinomi, regla de Ruffini, càlcul de les arrels enteres d'un polinomi, factorització de polinomis, fraccions algèbriques. Res de tot això apareixia al decret del currículum. El que hi podem trobar que s'acosta més és: «representar i analitzar situacions i estructures matemàtiques utilitzant símbols algebraics» o bé «resolució d'equacions de 1r i 2n grau i sistemes d'equacions lineals amb fluïdesa», que interpreto que és una mostra d'aquesta resistència al canvi, de falta de comprensió de les competències i del domini de les creences del professorat sobre el que són les matemàtiques i què és saber matemàtiques més enllà del que diu el currículum.

Aquestes concepcions eren grans barreres a l'hora d'implantar el model LOE. Calia temps per ressituar amb coherència el nou marc d'ensenyament de les matemàtiques.

- **Metodologia.** Tot el que s'ha dit abans sobre les exigències del constructivisme segueix sent vàlid, ja que continua sent la base en què es fonamenta el currículum. El fet d'introduir les competències no suposa cap contradicció, més aviat al contrari, és un complement molt coherent. Tant el constructivisme com el desenvolupament de les competències es basen en l'acció de l'alumnat. El Decret 143/2007 que desenvolupa el currículum, igual com passava amb el cas de la LOGSE, conté recomanacions interessants a l'apartat «Consideracions per al desenvolupament del currículum». En aquest apartat, es posa l'èmfasi en la importància dels contextos en el desenvolupament de les competències, en el treball interdisciplinari, l'establiment de connexions entre les diferents àrees i les matemàtiques. Promoure les actituds que afavoreixin l'aprenentatge de les matemàtiques. Combinar diferents formes de treball, individual, petit grup, gran grup, fer diferents tipus de tasca, resolució de problemes, investigacions, debats, manipulació d'objectes. A l'alumne no se li ha de donar tot fet i resolt, sinó que ha de fer una descoberta, una reconstrucció del coneixement. S'ha de dir que això que es pot escriure en poques línies per al professorat suposa un canvi considerable respecte a les pràctiques més tradicionals.

Les dificultats per comprendre l'abast dels canvis que establia la LOE es poden veure reflectits en els materials didàctics que van sortir al mercat a partir del 2007, en què es pot observar un cert retrocés respecte a alguns materials que s'havien proporcionat en el model LOGSE. Per exemple, no hi va haver cap renovació de materials en la línia del BDM que, de fet, continuaria sent vàlid.

Essencialment eren com els llibres tradicionals d'abans de la LOGSE, en què s'incorporen algunes activitats d'aplicacions. Es presenta tot resolt i l'alumne ha de creure i practicar, comportant-se de nou com un receptor passiu. Es fa una interpretació reduccionista

de les competències, i es deixen com a simples aplicacions al final de la lliçó. No s'havia entès que el desenvolupament competencial va molt més enllà de l'aplicació, s'ha de fer des del primer instant a totes les activitats, ha de motivar l'alumne cap a l'acció, a la descoberta, la conjecturació, modelització, etcètera. Les definicions, propietats i formalismes seria millor deixar-los per al final. Però el desenvolupament de les competències i l'enfocament constructivista no pot ser que quedi, en el millor dels casos, reduït a una petita part de cada lliçó. Com que la major part del professorat de Catalunya segueix algun llibre de text, això va suposar un alentiment considerable en la difusió d'aquest plantejament competencial.

S'ha de reconèixer que això resulta més fàcil veure-ho avui amb la perspectiva que ens dona el temps transcorregut, però en aquell moment era difícil que fos d'una altra manera ja que no hi havia hagut temps per preparar-los millor. A més a més, no es disposava enlloc d'activitats preparades i contrastades per poder portar-les a l'aula o que servissin d'orientació per generar-ne de noves. El que va passar és que el professorat amb més motivació van anar introduint a poc a poc activitats riques des del punt de vista competencial i també han anat apareixent materials didàctics que amb el temps s'han anat difonent.

- **Avaluació.** Manté la mateixa rellevància en el procés d'ensenyament-aprenentatge que ja se li atorgava en la LOGSE. Es mantenen els tres moments de l'avaluació: inicial, formativa i sumativa. Igual com abans, caldrà tenir present la diversitat dels instruments de recollida d'informació que s'han de fer servir per a l'avaluació. S'ha de fer tenint present que el que avaluem és el desenvolupament de les competències matemàtiques. És a dir, es tracta d'avaluar com s'utilitzen les matemàtiques en diferents situacions més que saber si han après determinats continguts que apareixen al currículum. Com ja hem mostrat, la idea de competència és molt àmplia i complexa. Tractar d'avaluar-la necessàriament requerirà un ampli ventall de diferents tasques i algunes de les quals hauran de ser complexes. No serà fàcil ni disposar

d'aquestes tasques ni de gestionar aquesta recollida d'informació. També requerirà disposar d'indicadors que ens informin del nivell d'assoliment de la competència.

Si la LOGSE va provocar una forta reacció i va costar anar introduint els canvis en el treball del dia a dia a les aules, l'abast dels canvis que proposava la LOE encara va ser més profund. El professorat ha anat fent el que ha pogut. És evident que suposava uns reptes importants en els continguts, la metodologia i l'avaluació, si bé crec que el professorat, en un primer moment, no en vam ser gaire conscients.

## LOMCE

Aquesta llei va arribar amb més intenció política de recentralització i uniformització del sistema educatiu a tot l'Estat espanyol que d'incorporació de novetats pedagògiques com van ser les anteriors. En el preàmbul es diu que sorgeix de les preocupacions per les altes taxes d'abandonament escolar, un 26,5% enfront d'un 13,5% de mitjana a Europa al 2011 segons dades que es fan constar a la mateixa llei, el baix nivell assolit pels estudiants com mostren els programes internacionals com PISA i estimular l'esperit emprenedor dels joves. També es nota un intent unificador del sistema educatiu a tot el territori de l'Estat espanyol quant a continguts i avaluació.

També es manté com a essencial l'adquisició de les competències cíviques i socials recollides a la recomanació del Parlament Europeu i del Consell del 18 de desembre del 2006, que va ser una de les aportacions més importants de la LOE. El redactat d'aquesta llei té un article únic de modificació limitada de la LOE. Per tant, el que és vigent és la LOE amb els canvis que estableix la LOMCE.

En el cas de Catalunya, a través del decret d'ordenació 187/2015 que desenvolupa els ensenyaments de l'ESO, aprofundeix més en la línia de desenvolupar les competències. Les presenta més estructurades i les relaciona amb continguts anomenats «clau». En el cas de la competència matemàtica, les dimensions coincideixen amb allò que en el Decret 143/2007 s'identificava amb els processos que es desenvolupen durant el curs a través dels diferents continguts que eren la resolució de problemes, raonament i prova, comunicació i

representació i connexions. A més de consultar el decret es pot llegir el text de la Generalitat de Catalunya (2017) on es donen orientacions per al professorat.

### Canvis estructurals

Els canvis estructurals no són gaire importants però en podem destacar alguns:

L'ESO estableix dos cicles, un que inclou els tres primers cursos i el segon que inclou només el 4t curs amb un caràcter propedèutic. L'etapa s'organitza en matèries de tres tipus: les troncal, les específiques i les de lliure configuració autonòmica. En el cas de les matemàtiques a tercer d'ESO, ja s'inclouïa unes matemàtiques orientades als ensenyaments acadèmics i unes a l'ensenyament aplicat. A quart ja ofería dos itineraris amb importants diferències, ja que un està orientat als ensenyaments acadèmics que permeten a l'alumne accedir als batxillerats i l'altre està orientat als ensenyaments aplicats per accedir a la formació professional. L'assignatura de matemàtiques era diferent en cada itinerari. En el cas de Catalunya, aquests itineraris de matemàtiques de 3r i 4t que proposa la llei s'han suavitzat a través del Decret 187/2015.

Es modifiquen les hores lectives. Passen a ser 3 hores a 1r i 4 hores setmanals a la resta de cursos. Al final de l'etapa es fan 385 hores lectives de matemàtiques, la matèria que fa més hores de totes.

Els batxillerats s'organitzen en tres modalitats: ciències, humanitats i ciències socials, i arts. L'ordenació es continua fent amb el Decret 142/2008, el mateix que es feia servir amb la LOE. És a dir, es mantenen els mateixos continguts i les mateixes hores lectives setmanals per a les dues modalitats, la de matemàtiques i la de matemàtiques aplicades a les ciències socials.



### Canvis curriculars

- **Objectius.** Al desplegament curricular de la LOMCE no consten els objectius de l'àrea de matemàtiques com sí que ho feien en els casos anteriors. Es pot considerar que són els mateixos que figuren al Decret 143/2007.

- **Continguts.** Els continguts a l'ESO són pràcticament els mateixos que al model LOE, l'única diferència és que els presenten com una llista de continguts matemàtics amb menys matisos de caràcter competencial. També s'ha de ressaltar que al model LOE es destacava la modelització com un dels processos més rellevants de la matemàtica i ara aquest terme ha desaparegut. Tot i que realment no s'havia dut gaire a la pràctica, la seva pèrdua és lamentable. Al document Generalitat de Catalunya (2017) es fa una presentació força detallada de les dimensions i les competències amb alguns exemples. Podem reconèixer alguns elements de les competències que es descriuen a Niss (2003) de les quals ja hem parlat abans. De tota manera, aquest document, que té la voluntat de ser una eina que ajudi el professorat a preparar tot el que té a veure amb la seva tasca docent i pel que he pogut observar en activitats de formació del professorat, no acaba de resultar del tot útil pel llenguatge que fa servir. Resulta complex per a un professor d'aula que no estigui una mica introduït en el tema.

En el cas del batxillerat, els continguts no han variat respecte al model LOE.

- **Metodologia.** El decret no dedica cap espai a aquesta qüestió. Sí que apareix al document Generalitat de Catalunya (2017). En aquest cas, dedica unes orientacions metodològiques per a cada una de les 12 competències. El que fa és aprofundir molt més en coherència amb la mateixa línia iniciada al decret del 2007. Es confirma l'opció que es basa en els contextos, en la investigació de l'alumnat, l'experimentació, la manipulació de materials, la conjeturació, la modelització, etcètera.

- **Avaluació.** Des del punt de vista conceptual, no hi ha canvis respecte a l'orientació donada a la LOE. Sí que s'observa ajudes al professorat per millorar en la competència didàctica

del professorat que proposava Niss (2006), ja que es faciliten elements per identificar diferents graus d'assoliment de cada una de les 12 competències. En aquest sentit, és un pas més per avançar en la línia de l'educació matemàtica en un marc competencial. El juliol del 2018 ha aparegut un nou decret d'avaluació de l'ESO que confirma que l'avaluació és un element més del procés d'aprenentatge, així com un indicador del nivell d'assoliment de les competències.

## Reflexions finals

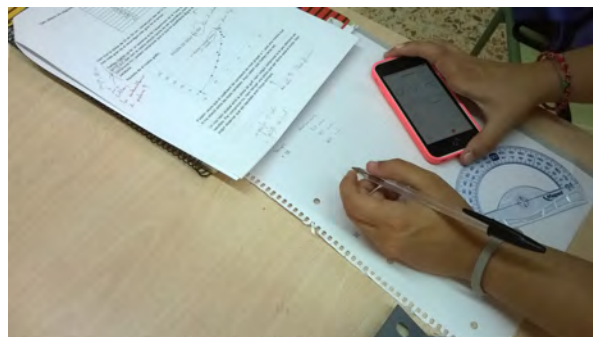
Des del 1970 fins al 2018 han passat 48 anys, entremig hem tingut tres lleis d'educació que han volgut canviar completament el sistema educatiu. En el cas de les matemàtiques s'han canviat els objectius, i les finalitats que alhora han provocat canvis en la manera d'ensenyar-les, d'avaluar-les, en el que significa saber matemàtiques i fins i tot en la mateixa idea del que són les matemàtiques. Els canvis proposats no han arribat a materialitzar-se amb la intensitat que figurava a la normativa, tot i que realment fan irreconeixible el sistema actual amb el de l'any 70. La feina del professorat ha estat alterada profundament. La seva implicació ha estat desigual, els més nostàlgics de la tradició han intentat canviar el mínim per sobreviure, els més innovadors han trobat un espai amb molt recorregut; entre aquests dos pols, una gran majoria ha anat evolucionant a un ritme més tranquil. La legislació sempre ha anat per davant de tots ells. Tinc la impressió que els alumnes han après millor per adaptar-se al món que els tocarà viure.

El camí de les reformes s'ha recorregut de manera imperfecta, encara queda molt per fer, però el sistema té la capacitat d'admetre-ho tot. Suporta totes les limitacions i contradiccions, sense que res grinyoli, la inèrcia el fa avançar tranquil·lament sense immutar-se fins a la propera reforma que torni a introduir nous canvis. Aquesta ja és la manera d'evolucionar del món de l'educació. Però el més important de les reformes educatives és que estan carregades d'utopia. Per això vull recordar una frase de l'escriptor uruguaià Eduardo Galeano:

«La utopía está en el horizonte. Camino dos pasos, ella se aleja dos pasos. Camino diez pasos y el horizonte se desplaza diez pasos

más allá. Por mucho que camine, nunca la alcanzaré. Entonces, ¿para que sirve la utopía? Para eso, sirve para caminar».

Les reformes serveixen per a això, per fer avançar i millorar el sistema tot i que les seves realitzacions siguin limitades.



## Referències

- [1] C. Alsina, J.M. Fortuny i J. Giménez, *Proyecto curricular de l'àrea de matemàtiques. Bon dia mates*. Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament. Servei de Difusió i Publicacions, (1994).
- [2] W. Blum i M. Niss, «Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to other Subjects - State, Trends and Issues in Mathematics Instruction». *Educational Studies in Mathematics* 22 (1991).
- [3] Cockroft, *Mathematics Counts*. London. Existeix versió en castellà *Las matemáticas sí cuentan* (1985) Ministerio de Educación y Ciencia. Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado. Edita Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia (1982).
- [4] Diario Oficial de la Unión Europea (30-12-2006) *Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo 18-12-2006 sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente 2006/962/CE*.
- [5] E. Galeano, «Ventana sobre la utopía». Descarregat de <https://www.poeticous.com/eduardo-galeano/ventana-sobre-la-utopia?locale=es> el 1/12/18.
- [6] Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament. Currículum. Educació



- Secundària Obligatòria. Àrea de Matemàtiques. Servei de Difusió i Publicacions, Barcelona (1993).
- [7] Generalitat de Catalunya, *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació secundària obligatòria*. 2a edició. Servei de Comunicació i Publicacions (2017). Descarregat de <http://xtec.gencat.cat/ca/curriculum/eso/curriculum/> el 9/12/18.
- [8] M. Kline, *El fracaso de la matemática moderna*. Siglo XXI editores. Madrid (1976).
- [9] M. Niss, «Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project». A: A. Gagatsis & S. Papastavrides, (eds.) *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education. Athens*, Hellas 3-5 January 2003. Athens: Hellenic Mathematical Society 115–124.
- [10] M. Niss, *What does it mean to be a competent mathematics teacher?* A general problem illustrated by examples from Denmark (2006).
- [11] Praktika, *23o Panellenio Synedrio Matematikis Paideias*. Patra 24-26 Noembriou 2006. Elleniki Mathematiki Etaireia, Patra, p. 39–47.
- [12] M. Niss i T. Hojgaard, (eds.), *Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. IMFUFA, Roskilde University, Denmark (tekst nr. 485 - 2011). English Edition, October 2011.
- [13] OCDE (1991) *Definition and selection of Competencies: Theoretical and conceptual Foundations (DeSeCo)*. Background paper. Descarregat el 5/12/18 de <http://www.oecd.org/education/skills-beyond-school/>.
- [14] L. Rico, *Bases teóricas del Currículo de matemáticas en educación secundaria*. Ed. Síntesis. Madrid (2007).
- [15] L. Rico i J.L. Lupiáñez, *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid. Alianza Editorial (2008).
- [16] UNESCO *Nuevas tendencias en la enseñanza de las matemáticas*, vol IV, (1979). Descarregat l'1/12/18 de <https://www.google.com/search?q=Nuevas+tendencias+en+la+enseñanza+de+las+matemáticas+UNESCO&ie=C3%B1anza+matemáticas+UNESCO&oe=utf-8&client=firefox-b>.

## Beca ERC 2018: Regularitat i singularitats en EDP el·líptiques

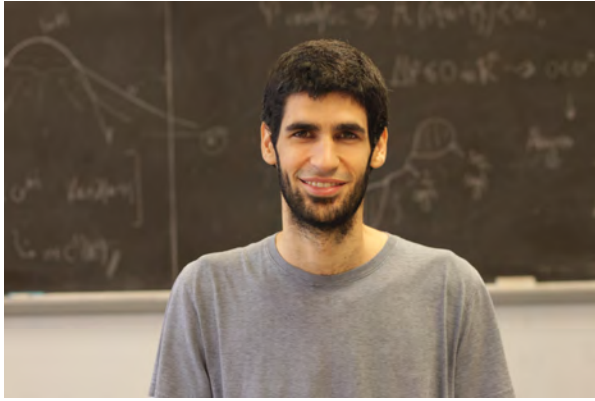
Xavier Ros-Oton  
Universitat de Zuric

Una de les qüestions més bàsiques i importants en l'estudi d'EDP és la regularitat:

Donada una EDP, són regulars totes les solucions o poden tenir singularitats?

Un exemple clàssic és el problema XIX de Hilbert (1900), que bàsicament demanava determinar si totes les solucions d'EDP el·líptiques variacionals són regulars. La qüestió va ser finalment resolta per De Giorgi i Nash l'any 1956 [6, 12, 13], i avui en dia és un dels teoremes més famosos i importants en el camp de les EDP. Durant la segona meitat del segle XX,

la teoria de regularitat per a EDP el·líptiques es va desenvolupar enormement, amb treballs de Caffarelli, Nirenberg, Krylov, Evans, i molts d'altres. La pregunta general és entendre si totes les solucions són regulars (com en el problema de Hilbert) o si, en canvi, poden tenir singularitats. Un exemple clàssic en el qual apareixen singularitats és el problema de Plateau, on les hipersuperfícies que minimitzen el funcional d'àrea poden tenir singularitats a  $\mathbb{R}^8$  i dimensions més altes [7]. Quan això passa, la qüestió principal passa a ser l'estructura del conjunt singular.



## Objectiu principal

Un dels objectius centrals d'aquest projecte ERC és desenvolupar noves tècniques que permetin demostrar resultats de regularitat genèrica per a EDP en les quals poden aparèixer singularitats. En altres paraules, l'objectiu seria establir resultats que confirmessin que, tot i que les solucions d'una certa EDP poden tenir singularitats, les solucions corresponents a gairebé tota condició de vora són regulars. És a dir, que les singularitats poden aparèixer però són molt poc usuals.

Aquest tipus de preguntes són a la vegada molt importants però francament difícils d'obtenir: en paraules de Klainerman [9], «el desenvolupament de mètodes que permetin establir resultats de regularitat genèrica es pot veure com un dels desafiaments més grans pel camp de les EDP en el proper segle».

El projecte es centra principalment a estudiar aquesta qüestió per a problemes de frontera lliure. Aquest tipus de problemes han estat una línia de recerca molt important en la comunitat d'EDP durant els darrers 60 anys [2, 3, 4, 8, 10, 11, 18], i en els últims anys he tingut la sort de contribuir-hi resolent alguns problemes oberts en aquest context [1, 5, 14].

## Però... què són els problemes de frontera lliure?

Molts problemes de física, indústria, finances, biologia, probabilitat i altres àrees poden ser descrits per EDP que tenen interfícies o fronteres que són desconegudes a priori. S'anomenen «problemes de frontera lliure». Un dels exemples més clàssics és el problema de Stefan (1831), que modela transicions de fase (com per exemple l'evolució d'un bloc de gel desfent-se). Des del punt de vista matemàtic,

la pregunta més important en aquest context és entendre la regularitat de les fronteres lliures. El desenvolupament de la teoria de regularitat per aquests problemes va començar a finals dels anys setanta amb els treballs de Caffarelli (pels quals va guanyar el premi Wolf el 2012 i el premi Shaw el 2018), i des d'aleshores ha estat una àrea de recerca molt activa.

Els millors resultats coneguts per al problema de Stefan (o el problema de l'obstacle, que correspon al cas estacionari) són els següents: la frontera lliure és  $C^\infty$  fora d'un cert conjunt de punts singulars [2, 8, 18]; i el conjunt de punts singulars està contingut en una varietat  $C^1$  de dimensió  $(n - 1)$  [3, 4, 11]. Els punts singulars són aquells on es formen cúspides, i poden aparèixer en qualsevol dimensió  $n \geq 2$  (vegeu Figures 1 i 2).

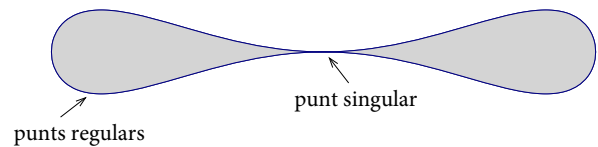


Figura 1. Un exemple d'una frontera lliure amb un únic punt singular. Es poden construir exemples similars amb infinites cúspides.

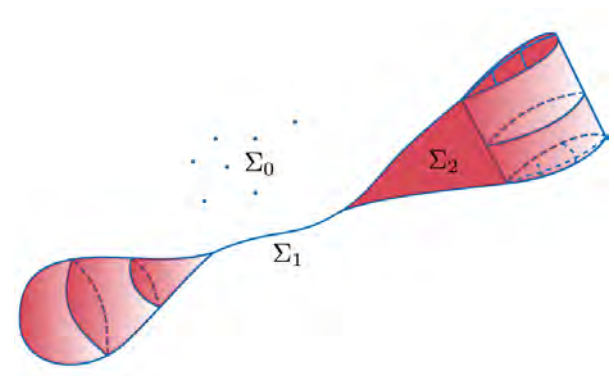


Figura 2. Un exemple a  $\mathbb{R}^3$  amb diferents tipus de punts singulars.

## La conjectura de Schaeffer

Com hem dit abans, un dels problemes més importants en EDP és el desenvolupament de mètodes per a demostrar resultats de regularitat genèrica. En el context del problema de l'obstacle (o el problema de Stefan), la qüestió clau és entendre la regularitat genèrica de les fronteres lliures ([15]):

**Conjectura** (Schaeffer, 1974): Genèricament, la frontera lliure al problema de l'obstacle és  $C^\infty$ , sense cap punt singular.

Aquesta conjectura només s'ha demostrat al pla [11], i no se sap res a  $\mathbb{R}^3$  (el cas físicament més rellevant) ni tampoc en dimensions més altes. És un dels problemes oberts més importants en aquest context, i la seva resolució permetria atacar problemes similars en altres tipus d'EDP en les quals puguin aparèixer singularitats. En general s'han pogut demostrar molt pocs resultats en aquesta direcció, i la majoria tracten els casos en els quals el conjunt singular és molt petit (com el problema de l'obstacle a  $\mathbb{R}^2$  [11], o bé superfícies mínimes a  $\mathbb{R}^8$  [17]).

Un dels objectius més ambiciosos del projecte ERC és demostrar la conjectura de Schaeffer. A més estudiarem també la pregunta anàlega per al problema de Stefan (en què les solucions depenen del temps). En aquest context no es coneix cap resultat de regularitat genèrica, ni tan sols a  $\mathbb{R}^2$ .

### Altres objectius

Evidentment, el que he explicat aquí és només una part del projecte, però alhora central i representativa del tipus de problemes que s'estudiaran. Altres preguntes tracten la regularitat per a EDP el·líptiques completament no lineals, de la forma

$$F(D^2u) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

o, més en general,

$$F(D^2u, \nabla u, u, x) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Les solucions d'aquestes equacions són sempre  $C^\infty$  en dimensió  $n = 2$ , mentre que en dimensions  $n \geq 5$  hi ha exemples de singularitats (solucions  $u$  per a les quals  $D^2u$  no és acotat). Un dels problemes oberts més importants en aquest context és entendre què passa a  $\mathbb{R}^3$  i  $\mathbb{R}^4$ .

### Referències

- [1] B. Barrios, A. Figalli i X. Ros-Oton, «Free boundary regularity in the parabolic fractional obstacle problem». *Comm. Pure Appl. Math.* (2018), en premsa.
- [2] L. Caffarelli, «The regularity of free boundaries in higher dimensions». *Acta Math.* 139 (1977), 155–184.
- [3] L. Caffarelli, «The obstacle problem revisited». *J. Fourier Anal. Appl.* 4 (1998), 383–402.
- [4] L. Caffarelli i N.M. Rivière, «Asymptotic behavior of free boundaries at their singular points». *Ann. of Math.* 106 (1977), 309–317.
- [5] L. Caffarelli, X. Ros-Oton i J. Serra, «Obstacle problems for integro-differential operators: regularity of solutions and free boundaries». *Invent. Math.* 208 (2017), 1155–1211.
- [6] E. De Giorgi, «Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari». *Memorie della Accademia delle Scienze di Torino. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali* 3 (1957), 25–43.
- [7] E. Giusti, «Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation». *Monographs in Mathematics* 80, Birkhäuser, 1984.
- [8] D. Kinderlehrer i L. Nirenberg. «Regularity in free boundary problems». *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa* (1977), 373–391.
- [9] S. Klainerman, «PDE as a unified subject». *Geom. Funct. Anal.*, Special Volume – GAFA2000, 279–315.
- [10] J.L. Lions i G. Stampacchia, «Variational inequalities». *Comm. Pure Appl. Math.* 20 (1967), 493–519.
- [11] R. Monneau, «On the number of singularities for the obstacle problem in two dimensions». *J. Geom. Anal.* 13 (2003), 359–389.
- [12] J.F. Nash, «Parabolic equations». *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 43 (1957), 754–758.
- [13] J.F. Nash, «Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations». *Amer. J. Math.* 80 (1958), 931–954.
- [14] X. Ros-Oton, «Free boundaries and obstacle problems: an overview». *SeMA J.* (2018), en premsa.
- [15] D.G. Schaeffer, «An example of generic regularity for a nonlinear elliptic equation». *Arch. Rat. Mech. Anal.* 57 (1974), 134–141.

- [16] D.G. Schaeffer, «Some examples of singularities in a free boundary». *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 4 (1977), 133–144.
- [17] N. Smale, «Generic regularity of homologically area minimizing hypersurfaces in eight dimensional manifolds». *Comm. Anal. Geom.* 1 (1993), 217–228.
- [18] G.S. Weiss, «A homogeneity improvement approach to the obstacle problem». *Invent. Math.* 138 (1999), 23–50.

## Conversa a dues bandes

### Carles Bonet i Narcís Clara

Albert Avinyó  
Editor de la *SCM/Notícies*

La conversa d'aquesta *SCM/Notícies* és entre Carles Bonet, professor del Departament de Matemàtiques de la UPC, i Narcís Clara, professor del Departament d'Informàtica, Matemàtica Aplicada i Estadística de la UdG. El fet que els uneix a tots dos, a més de ser matemàtics, és el seu coneixement de la vida parlamentària. El primer va ser membre del Parlament de Catalunya i del Senat espanyol durant més de deu anys, mentre que el segon va ser escollit parlamentari en les darreres eleccions catalanes, tot just fa un any.

El text que trobareu a continuació és una transcripció de gran part de la conversa que vam mantenir en un restaurant italià, tot just després que en Narcís sortís d'un dels darrers plens del Parlament de l'any 2018.

**Narcís:** Hola, Carles.

**Carles:** Hola, Narcís.

**N:** Potser podem començar explicant com va ser el teu procés fins a arribar a ser parlamentari i abandonar, durant un temps bastant llarg, la teva activitat acadèmica.

**C:** Em vaig presentar per primera vegada a les eleccions l'any 1991 i va ser conseqüència, com tu dius, de tot un procés... Durant la meua època de professor universitari havia creat un grup catalanista amb Marcel·lí Perelló, germà d'en Carles, que ens va portar a editar una revista catalanista, el *Full* i, més tard, a fundar el Cercle Ramon Llull. Tot això, va donar lloc a presentar-me a les eleccions municipals del 1991 per Esquerra Republicana. No vaig sortir elegit però, després de tot un seguit de vicissituds i canvis en el partit i de les quals ara no

cal parlar, vaig presentar-me a les eleccions al Parlament de Catalunya del 1999; vaig sortir escollit i vaig ser nomenat senador al Parlament a Madrid. Tot això va durar fins al 2011. És a dir, que vaig estar més d'onze anys sense fer cap derivada.



**N:** Jo en porto només un! El meu cas és una mica diferent, La meua entrada en la política és com a conseqüència dels fets del 27 d'octubre (declaració de la independència, instauració del 155 i, aleshores, convocatòria d'eleccions per part de Mariano Rajoy), Carles Puigdemont intenta fer una llista unitària però en no aconseguir-ho, n'ha de fer una altra, podem dir que una mica precipitadament. En aquell moment, vaig rebre una trucada per



demanar-me que en formés part. M'ho vaig rumiar en el poc temps que vaig tenir i vaig acceptar la proposta.

**C:** Però tu no havies tingut cap càrrec polític abans?

**N:** Cap ni un. A mi sempre m'ha agradat la política, però jo era un militant de base: primer de Convergència i, després, del PDECat.

**C:** I no coneixies la dinàmica parlamentària per dins?

**N:** Jo sempre he estat una persona força «polititzada», en el sentit que m'ha agradat la política, si ho vols dir així, però el dia a dia, les entranyes del Parlament, les desconeixia bastant i pensa que el meu inici al Parlament va ser força dur. Recorda que eren dies sense govern, que no se sabia si podria ser escollit Carles Puigdemont com a president de la Generalitat o no. El Parlament era sempre ple de periodistes. Jo vaig pensar: si això continua així... Però després, amb la formació del govern, el focus jo crec que es va traslladar bastant a Palau i la vida parlamentària va tornar a una certa normalitat.

**C:** I ara que fa gairebé un any que ets fora de les aules, quines diferències veus entre l'activitat acadèmica i la de parlamentari?

**N:** El tipus de feina és molt diferent, òbviament, però segurament el fet diferencial és el temps. Al Parlament tot és urgent, fins i tot una mica precipitat, mentre que com a professor tens més temps per fer les coses amb una mica més de reflexió.

**C:** De vegades, algunes persones creuen que ser parlamentari és seure al teu escó i escoltar, una mica com el que fan els alumnes a classe i no és així. Cal preparar lleis, mocions, rebre col·lectius, estar informat, cal parlar amb el teu territori i sempre amb una certa urgència.

**N:** Sí, tot és molt ràpid, passes una part important del temps fent trucades, enviant whatsapps, etcètera.

**C:** De vegades, alguns mitjans de comunicació només mesuren l'activitat del parlamentari pel nombre de preguntes que presenta...

**N:** I això no és correcte. Tot sovint la pregunta està signada pel cap de grup però l'ha preparada un altre parlamentari i, finalment, la defensa

un altre membre que potser ha intervingut molt poc en l'elaboració.

**C:** O, per exemple, moltes vegades em pregunten quina és la feina que es fa al Senat i jo els contesto: la mateixa que al Congrés però sense la televisió. Al Senat es retoquen el 99% de les lleis que hi arriben, després aquestes tornen al Congrés, on s'aproven o es rebutgen les esmenes presentades pel Senat, excepte en un cas i del qual es parla molt aquests dies: la Llei d'estabilitat pressupostària. Aquesta llei han d'aprovar-la les dues cambres. Això és un «gol» que el PP va marcar al PSOE quan el partit socialista estava en hores baixes. Podria desaparèixer el Senat? És clar que sí però aleshores els parlamentaris del Congrés haurien d'estar menys pendents de les televisions i no cometre tantes errades!

**N:** El problema del Senat és la representativitat. És difícil d'entendre que una província com, per exemple, Sòria tingui els mateixos senadors que Barcelona. Això fa que a l'Estat espanyol el PP tingui majoria absoluta al Senat des de fa molt de temps. Ara bé, amb l'aparició dels nous partits que trenquen el tradicional bipartidisme segurament aquesta mena de *statu quo* desapareixerà... Per cert, ara que estem parlant del Senat, vas trobar moltes diferències entre el tipus de feina al Parlament de Catalunya i al Senat de Madrid.

**C:** No gaires. Segurament, i com a fruit de la seva funció, l'activitat del Senat és, tal com hem dit abans, més pausada, més reflexiva.

**N:** Un altre punt destacable de la vida parlamentària, malgrat que habitualment el tràmit parlamentari de les lleis acostuma a ser llarg, és la sensació que tens després de l'aprovació d'una llei on has intervingut d'una manera decisiva.

**C:** I tant! Per exemple, em sento molt satisfet d'haver dedicat molt de temps i esforços per aconseguir pactar l'actual Llei d'universitats de Catalunya, la LUC, amb Convergència i Unió, treballant colze a colze amb Mas Colell i el seu grup. Recordo que per part d'Esquerra Republicana hi anàvem els tres Carles; Carles Solà (exrector de la UAB), Carles Perelló i jo mateix. Participar en l'elaboració d'una llei sobre un tema que coneixes bé i afecta positivament gent propera crea una certa satisfacció. Però també he de dir que, de vegades, com a parlamen-

tari, prens decisions de les quals després et penebeixes. Per exemple, recordo que quan era senador per l'Entesa, vaig ser membre de la comissió que havia d'escollir el representant del Senat al Tribunal Constitucional i el que es presentava era un tal Pérez de los Cobos. En aquell moment, però, per no estudiar prou o segurament per falta d'informació interessada per part dels populars, òbviament, i també dels socialistes, no vaig saber que aquesta persona havia estat membre del PP i ell ho va amagar quan ens va explicar el seu llarg currículum. Pensa que la comissió havia rebutjat feia poc temps un altre candidat per haver estat militant socialista. Si ho hagués sabut ho hauria dit i no m'hagués abtingut en la votació.

**N:** Sí, però hauria sortit igual. El pacte entre socialistes i populars ja estava fet.

**C:** Segurament sí, però jo ara no tindria sobre meu aquest pecat que «Déu, Nostre Senyor, no em perdonarà mai»...

**N:** Ha, Ha. Tens tota la raó. De vegades has de decidir, i pel tema de la urgència que hem comentat abans, ho has de fer sense tenir la informació necessària o sense poder haver-te assessorat o haver estudiat el tema de manera correcta. Però en el meu cas, i segurament per ser matemàtic, o més ben dit per ser de ciències, he observat que sempre m'han assignat temes polítics de tipus tècnic, com poden ser el canvi climàtic, la contaminació de l'aire o la sindicatura de comptes, i no pas temes més polítics, com poden ser els relatius a les llibertats individuals o els drets socials

**C:** A mi també em passava una mica el mateix. Per exemple, com a matemàtic, vaig ser membre de la Comissió de Ciència del Senat. Aleshores, recordo que una vegada vam haver d'anar a Amsterdam, a la seu de l'Agència Espacial Europea i quan ja érem a l'aeroport, ens van trucar per dir-nos que els membres del PP i del PSOE no es podien desplaçar. Això va fer que la comissió quedés reduïda a Josep Varela, també matemàtic i de Convergència, i jo mateix com a membre d'Esquerra. Ja et pots imaginar, un membre de Convergència i un altre d'Esquerra representant Espanya. Va ser divertit.

**N:** Si més no, curiós. Jo també tinc una anècdota recent relacionada amb les matemàtiques i la vida parlamentària. Fa poc, a

la comissió sobre el cas Castor, vam rebre dos informes del Govern espanyol i un estava fet, molt ben fet diria jo, per un grup d'experts del Massachusetts Institute of Technology (MIT) i, no t'ho podràs creure, estava ple d'equacions en derivades parcials que modelitzaven el problema de la falla!

**C:** I estaven ben resoltes?

**N:** Home, com et pots imaginar a la majoria de parlamentaris no era aquesta la qüestió que més els importava! Tot i això, hem demanat que algun membre dels signants d'aquest treball vingui a explicar-lo a la comissió. Tornant a l'inici de la nostra conversa sobre les diferències entre la vida acadèmica i la vida parlamentària, cal destacar un altre aspecte important: la relació que tens amb els companys de grup parlamentari o amb els qui més coincideixes a les comissions que és molt diferent de la que es tens amb els alumnes a classe i amb els companys de departament.

**C:** Hi ha aquella frase que diu que «hi ha amics, enemics i companys de partit»

**N:** Això crec, que és una frase mítica del Giulio Andreotti.

**C:** Ara bé, tot i la frase de l'Andreotti, recordo haver mantingut bones relacions d'amistat amb altres parlamentaris, fins i tot de grups parlamentaris oposats al meu.

**N:** Com et pots imaginar, en el cas del Parlament de Catalunya actual, això és difícil o gairebé impossible. El fet d'haver-hi parlamentaris a la presó i a l'exili ho fa molt difícil...

**C:** És clar. La situació ara és molt diferent de la que hi havia, per exemple, en els anys del tripartit. Si continuem parlant de la vida parlamentària versus la vida acadèmica, un altre punt rellevant és la relació o el tracte amb els assessors polítics, que són necessaris, com hem dit abans, i amb el personal d'administració del Parlament.

**N:** En el meu cas, he dir que el tracte ha estat exquisit. Són persones molt ben formades i molt competents.

**C:** Jo també opino el mateix. Tant al Parlament català com al Senat el meu tracte amb ells ha estat molt agradable.

**N:** Jo també destacaria la seva disponibilitat horària. Per exemple, contestar-te correus o whatsapps a les onze de la nit...

**C:** Com hem dit abans, en política tot és urgent. A més, tots els funcionaris del Parlament tenen clar que tu ets allà com a representant del poble. Una altra cosa és el dia que deixes de ser-ho.

**N:** D'això també m'agradaria parlar-ne amb tu. Com va ser la teva reincorporació a la universitat en deixar de ser parlamentari?

**C:** Mira, perquè us feu una idea, quan jo vaig marxar de la universitat, tot just començava a utilitzar-se el LaTeX i quan vaig tornar tenia ja 57 anys! Però vaig tenir la gran sort que

Tere Martínez-Seara em va acollir en el seu grup de recerca i em va proposar un tema d'estudi que jo ja coneixia bé d'abans. Aleshores, treballant molt, ho he dir, he aconseguit publicar, assistir a congressos, etcètera. Aquests dies estic omplint paperassa per demanar un sexenni de recerca!

En aquest punt, el cambrer italià ens va portar molt amablement el compte, vam pagar, vam sortir del restaurant i ens en vam anar a la porta del Born a fer la fotografia que acompanya aquest article. En acomiadar-nos, en Narcís va anar-se'n a participar en una tertúlia política de Ràdio-4 i en Carles a preparar-se les classes del matí següent...

## La pregunta de la *SCM/Notícies*

**Quins canvis de continguts i metodologia s'han dut a terme durant aquests darrers vint-i-cinc anys en l'ensenyament universitari de les matemàtiques i quins creus que n'han estat els motius?**

**Antoni Benseny Ardiaca**

**Delegat per a estudiants i internacional de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica, UB**

La meua experiència com a docent a la UB ja és d'uns 40 anys. Quan estudiava i en els meus primers anys com a docent, la llicenciatura de Matemàtiques a la UB estava programada amb assignatures de curs sencer, docència presencial i amb avaluacions via exàmens finals i, en alguns casos, exàmens parcials. En algunes assignatures, es va començar a incloure treballs pràctics que l'alumnat havia de realitzar amb l'ajut del professorat.

El nivell matemàtic i d'abstracció utilitzat comportava un esforç de comprensió i d'estudi massa alt per part de l'alumnat i era la causa de molts abandonaments, sobretot en el primer curs, i de resultats acadèmics baixos. La majoria de l'alumnat que superava el primer curs, ja molt seleccionat, s'acabava llicenciant amb uns coneixements matemàtics força sòlids en diverses àrees i amb unes grans capacitats de treball autònom, però amb una orientació massa dirigida cap a la recerca i no gaire cap a la professionalització. Es perdia molt d'alumnat

que no podia seguir els estudis i que hauria pogut ocupar places de docents a secundària o llocs de treball en altres àmbits.



Amb el pas dels anys, el professorat va anar prenent consciència de la situació i adequant la docència a l'alumnat. La Facultat de Matemàtiques es va implicar en una renovació de la docència que va comportar, a partir de l'any 2000: 1) l'oferta d'un semestre introduc-

tori, format amb assignatures de lliure elecció, que facilitava una millor integració als estudis de matemàtiques, 2) la introducció de classes de laboratoris de problemes i d'ordinadors que permetia el seguiment i l'avaluació continuada de l'alumnat.

L'arribada de l'Espai Europeu d'Educació Superior es va aprofitar per acordar un pla d'estudis que recollia, en els plans docents de les assignatures, els canvis de continguts i de metodologies que s'havien començat a introduir. Al mateix temps, es va millorar l'oferta d'estudis de la facultat amb els graus simultanis amb Física, Enginyeria Informàtica i ADE.

Paral·lelament, la facultat, ara de matemàtiques i informàtica, ha anat desenvolupant diverses activitats de difusió de les matemàtiques en l'àmbit de secundària: la Matefest/Infotest, les Xerrades-Taller, entre d'altres. Això, lligat a l'augment del prestigi i de les possibilitats d'ocupació futura dels titulats, ha portat a la millora de les notes de tall en els graus i graus simultanis. La facultat també ha apostat decididament per la mobilitat internacional i per la relació amb les empreses: s'han produït un increment notable en la mobilitat i en els convenis de pràctiques amb empreses per part de l'alumnat.

La combinació dels canvis metodològics amb l'ampliació de l'oferta, el seguiment i la difusió dels estudis ha comportat una gran millora, tant en l'abandonament com en els resultats acadèmics de l'alumnat. Ara, la facultat està recollint els resultats de totes les iniciatives preses i dels canvis socials, que s'han traduït en una gran disminució en l'abandonament inicial,

i una millora en el rendiment acadèmic i en l'ocupació posterior de l'alumnat titulat.

Personalment, crec que ha valgut molt la pena l'aposta que vam fer el professorat cap a una docència més proactiva i acollidora, que ha permès un millor seguiment i una millor integració de l'alumnat via l'avaluació continuada i que ha desembocat en una millora espectacular de resultats.

Tot i això, encara queda algun aspecte que, tot i que ha començat a millorar, la facultat vol cuidar especialment: em refereixo a a fer créixer la implicació en la formació del professorat de matemàtiques de secundària, que va minvar quan el màster de formació del professorat en l'especialitat de matemàtiques va esdevenir interuniversitari i que ha ressorgit amb el Grup Cúbic. La facultat ha estat un referent en l'educació matemàtica dels docents de matemàtiques de secundària, com ho testifica l'oferta de l'assignatura de Didàctica en tots els seus plans d'estudis i la seva col·laboració en les diverses edicions del màster de formació del professorat de secundària, ara interuniversitari. Aquesta implicació ha crescut amb la creació del Grup Cúbic de Didàctica de la Matemàtica de la Facultat de Matemàtiques que, entre altres activitats, va organitzar el C2EM i ofereix cada curs un postgrau sobre recursos educatius i la Jornada de Didàctica de la Matemàtica. La facultat vol continuar sent un referent, promoure més activitats i fer-les més visibles al professorat i a l'alumnat de secundària interessat en la docència matemàtica, a fi de col·laborar en la millora de la formació del professorat actual i fer augmentar l'interès i la motivació de l'alumnat per esdevenir professorat de matemàtiques en el futur.

## **Josep Maria Brunat** **Professor jubilat del Departament de Matemàtiques, UPC**

Després de dos anys i escaig de jubilat, el món educatiu em sembla cada vegada més lluny i, per ser sincer, es pot dir que he girat full. Tot i així, provaré de donar la meua opinió. Haig de dir, però, que el que diré són, en general, més impressions que fets basats en dades objectives, amb tot el perill de subjectivitat que això comporta.

Em sembla que els disparadors principals dels canvis en els continguts i en els mètodes de l'ensenyament de les matemàtiques a la universitat han estat dos. Un és la realitat legislativa, que ha tingut una incidència molt rellevant. Deixant de banda normatives menors, els dos canvis legals de més repercussió han estat, primer, el pas de la Ley General de



Educación (LGE) de 1970 a la Ley Orgánica de Ordenación del Sistema Educativo en España (LOGSE) del 1990 i, després, la creació de l'Espai Europeu d'Educació Superior (EEES). El segon motor dels canvis ha estat el que es coneix generalment com a noves tecnologies. En uns aspectes han afectat totes les matèries, no només les matemàtiques, però pel que fa específicament al desenvolupament de les classes de matemàtiques, l'existència i disponibilitat als centres universitaris de programaris matemàtics ha canviat continguts i mètodes.



Respecte als canvis legislatius, no diré res que no s'hagi dit altres vegades. La LGE feia arribar a les carreres científiques i tècniques joves que havien obtingut el graduat escolar, havien aprovat els tres anys de BUP, després el COU i, finalment, la selectivitat. A cada un d'aquests últims quatre cursos hi havia quatre o cinc hores setmanals de matemàtiques (tot i que els últims anys ja es va anar rebaixant l'exigència amb invents com les hores B o admetent matriculacions a COU sense haver aprovat tot el BUP). Amb la LOGSE, la trajectòria és substancialment diferent: hi ha l'ensenyament secundari obligatori (ESO), general per a tots els estudiants sense distinció, dos anys de batxillerat i la selectivitat. Tot això es pot matisar molt, però vist a l'engròs, el resultat va ser que en els primers cursos universitaris hi havia alumnes amb menys constància en l'estudi i menys coneixements de matemàtiques.

Amb el pas dels anys quan aquests alumnes arriben a la universitat, els temaris tradicionals de les carreres científiques i tècniques resulten inassumibles i comencen les reformes dels plans d'estudis. Uns anys després, amb l'entrada en vigor de l'EEES, s'uniformitzen les carreres de tres i cinc anys a estudis de quatre anys,

i es tornen a canviar plans d'estudi arreu. Tinc la impressió que en el cas de carreres de cinc anys que passen a quatre, en general el pes de les matemàtiques decreix no només en valor absolut, cosa inevitable, sinó també percentualment (això ho vaig explicar al seu dia en quatre carreres de la UPC) i, en el cas de carreres que passen de tres a quatre, el nombre de crèdits dedicats a les matemàtiques o creix molt poc o no creix i, per tant, en baixa el pes relatiu. (Casualitat o no, els anys que la demanda universitària va baixar en picat, els centres dels campus de Barcelona de la UPC que van resistir millor la baixada de la demanda van ser els que van mantenir el pes de les matemàtiques: camins, industrials i, òbviament, matemàtiques.) Els canvis legislatius, doncs, han comportat en general uns alumnes que arriben a la universitat amb menys preparació i una disminució de la importància de les matemàtiques en els plans d'estudis.

Naturalment, un professor de matemàtiques no ho pot veure amb bons ulls. Però em fa l'efecte que hi ha un munt de professors d'altres matèries, i potser també estudiants, que pensen que això és raonable o, almenys, que té poca importància. Consideren que no calen tantes matemàtiques per ser un bon enginyer informàtic, de telecomunicacions, arquitecte o biòleg. Ara i aquí no cal entrar en aquest debat, però no puc deixar de recordar les opinions del número anterior de la *SCM/Notícies* sobre les conseqüències que ha comportat en l'ensenyament de les matemàtiques a secundària el fet que durant la carrera no es facin gaires matemàtiques.

Respecte als canvis tecnològics, hi ha aspectes que han afectat totes les matèries. L'existència de les intranets, per exemple, ha permès la fàcil distribució de materials, l'assignació i recollida de treballs, la publicació de notes, la disponibilitat d'exàmens de les assignatures de cursos anteriors (sovint resolts), i moltes d'altres coses que han canviat l'accés a la informació i les formes de relació entre professors i estudiants. Certament, qui més qui menys ha patit interfícies tan poc amigables com hom es pugui imaginar i proves fallides, coses que sovint resulten exasperants. Però aquests inconvenients no són atribuïbles a la tecnologia en si, sinó a persones concretes que han fet les coses malament. Vist en perspectiva,

crec que els canvis que ha aportat la tecnologia han estat a fi de bé.

En el cas particular de les matemàtiques, el canvi més substancial en el dia a dia de les aules s'ha degut a la incorporació a la docència de programari matemàtic. Que en tinguí constància, els primers congressos d'àmbit estatal sobre la utilització de les noves tecnologies en l'ensenyament de les matemàtiques a la universitat es van fer els anys 1993 (Madrid), 1994 (València) i 1995 (Barcelona). Vaig ser en tots tres i recordo la gran il·lusió dels participants per les expectatives pedagògiques que s'obrien. Avui, pràcticament arreu, moltes assignatures comporten unes hores en què l'estudiant es baralla amb alguna mena de programari. S'hi pot trobar de tot. Matèries en què l'ús de l'ordinador és intens i indispensable; matèries en què se'n fa un ús ocasional per posar exemples reals o per buscar contraexem-

### Rosa Camps Departament de Matemàtiques, UAB

No sé si ha canviat tant la metodologia en els darrers vint anys. Cadascú a la seva aula fa el que pot, i les matemàtiques se segueixen ensenyant principalment amb pissarra. A més, hi ha força diferències d'un professor a un altre. Però, a banda del que es fa individualment, sí que crec que els condicionants, almenys pel que fa al grau de matemàtiques, han canviat molt i han forçat millores metodològiques.

Una diferència molt evident ha estat la irrupció generalitzada dels ordinadors. D'entrada, ara la comunicació amb els estudiants via correu electrònic és molt més fàcil, i les intranets han permès proporcionar molt més material, millorar els lliuraments de problemes o, fins i tot, fer petites proves. Però, sobretot, el canvi ha estat en els ordinadors com a eina de treball dels estudiants. Fa vint anys només es feien pràctiques en les assignatures de càlcul numèric i d'estadística. Actualment, hi ha una assignatura a primer curs d'eines informàtiques que no només ensenya als estudiants a programar, sinó que també introdueix manipuladors algebraics i composició de textos matemàtics (LaTeX). Pel que fa als manipuladors algebraics (SAGE, Mathematica o Maple), la idea és proporcionar als estudiants una eina de simulació, un laboratori per poder

plés, o per fer gràfics que ajuden a clarificar conceptes. Entremig, tota la gradació. Com passa sempre amb les tecnologies, de vegades se'n fa un ús excel·lent, i de vegades un mal ús, com quan s'incorpora l'ordinador de forma innecessària només per por que el centre o el professor sigui qualificat d'antiquat. Així doncs, el meu parer és que la incorporació de programari matemàtic a les aules ha estat d'excel·lent a inútil, depenent dels casos.

Hi ha altres aspectes que han anat canviant i que tenen la seva importància. Per dir-ne només un, els mètodes d'avaluació, que tenen tendència a complicar-se cada vegada més. Però em fa l'efecte que els canvis més significatius han estat els esmentats més amunt: d'una banda, les modificacions dels plans d'estudi motivades pels canvis en les lleis educatives i, de l'altra, la introducció de programari a les aules.

fer experiments matemàtics, que serà un suport en la resta d'assignatures, per calcular, però també per agafar intuïció sobre els objectes matemàtics que aniran trobant (funcions, superfícies, equacions diferencials, grups, ...). Confesso que quan, en la reforma del darrer pla d'estudis, es va proposar incloure LaTeX a primer curs, em va semblar una frivolidat. Però he canviat completament d'opinió: és clar que l'actual generació d'estudiants se sent molt a gust treballant electrònicament, he pogut comprovar com ara passen més els apunts a net i tenen més cura dels lliuraments.



S'ha millorat molt, segons el meu parer, en l'acompanyament i l'orientació de l'aprenentatge a primer curs. Antigament les assignatures

eren totes semestrals i especialment denses ja des del primer semestre (càlcul, àlgebra lineal, àlgebra no lineal). Sense cap avís, els estudiants es trobaven amb un examen el febrer que suspèien en un 70 o 80%. Si aprovaven just, encara era pitjor, perquè arrossegaven durant tota la carrera dèficits formatius tan grans que eren incapaçs d'assimilar les matèries de cursos posteriors. Aquest problema s'ha anat corregint amb els anys, introduint més parcials, lliuraments de problemes, entrevistes amb els estudiants... Tot per donar-los informació del seu progrés i per forçar el treball continuat al llarg del curs. En aquesta línia d'afavorir l'assimilació de la base, també s'han fet anuals en els dos darrers plans d'estudis de la UAB les quatre principals assignatures de primer curs. La gran majoria dels estudiants que arriben a la universitat no estan acostumats a escriure matemàtiques, ni tan sols a redactar en general. Per això a primer curs s'incideix especialment en aquest aspecte, i es fixen lliuraments en què els estudiants hagin d'esforçar-se a redactar correctament, i se'ls convoca a entrevistes amb el professor per revisar el que han escrit.

En l'avaluació del Grau de Matemàtiques de la UAB que es va fer l'any 2000 es va constatar que la majoria dels estudiants tenien una falta preocupant de motivació, i d'informació sobre la utilitat de les matemàtiques i, també, sobre la potència del llenguatge, les eines i les capacitats adquirides durant la carrera. A partir de l'any 2007 el marc Bolonya va donar molta llibertat a les universitats en el disseny dels nous plans d'estudis. Aquest fet va permetre la inclusió en el Grau de Matemàtiques de la UAB d'assignatures noves, com ara Matemàtica Discreta, Taller de Modelització o Pràctiques en Empreses. En una assignatura introductòria de matemàtica discreta els estudiants «al·lucinen» en veure com problemes reals difícils es tornen senzills quan es passen al món dels grafs, o descobreixen demostracions d'Erdős, plenes d'idees alhora elementals i genials. Al Taller de Modelització els estudiants treballen durant un semestre en un problema del món real, i l'han de resoldre proposant un model matemàtic amb les eines de què disposen (molt poques, a segon curs). En molts casos els resultats són sorprenents i molt gratificants per als estudiants. Un fet, un xic meravellós, que passa en aquesta assignatura és que per desenvolupar

el seu projecte els estudiants han d'aprendre pel seu compte, per exemple, probabilitat, estadística, equacions diferencials o àlgebra, abans de l'assignatura corresponent. I ho fan amb prou d'èxit, de manera autònoma i amb una motivació increïble. Finalment, Pràctiques en Empreses és una assignatura en què gairebé tots els estudiants constaten el resultat del seu esforç, comproven que el grau els ha canviat de veritat i que en el món laboral es valoren les seves capacitats. Els informes dels tutors a les empreses sobre els estudiants els hauríem d'emmarcar i penjar-los a les parets de les facultats, per donar-nos moral a tot plegats (la titulació de Matemàtiques segueix sent dura, en comparació amb moltes altres titulacions, però val la pena!).

En la implementació dels dos darrers plans d'estudis es va fixar una nova tipologia de classe: els seminaris, on els estudiants treballen en grups per resoldre problemes que se'ls proposen, amb la supervisió d'un professor, en aules amb pocs estudiants. Aquests tipus de sessions ja s'havien anat implantant en assignatures de primer curs des dels anys noranta, impulsades pel grup de Didàctica de les Matemàtiques de la UAB. Però va ser a partir del pla d'estudis del 2001 que es va generalitzar a totes les assignatures.

El que ha canviat en els darrers anys també és la transparència en la informació de les assignatures. Sembla mentida, però fa vint anys no tots els professors donaven el programa detallat de la seva assignatura als estudiants i encara menys el feien públic fora de l'aula. Actualment, encara que a vegades contenen informació molt críptica sobre competències, almenys les guies docents fixen els objectius de l'assignatura, els prerequisits i l'avaluació, a banda dels continguts i la bibliografia. I, com que les guies docents es publiquen a internet, ja no hi ha excusa per obviar el que es fa a l'assignatura del costat.

Fa vint anys a la UAB teníem pocs estudiants que vulguessin estudiar matemàtiques en primera o segona opció i la nota de tall era de 5. Aquestes condicions inicials feien que l'experiència de molts estudiants fos negativa, d'un desencís absolut, gairebé d'aversion a les matemàtiques, de sensació d'inutilitat, fins i tot. D'altra banda, als estudiants excel·lents se'ls veia tristos, eren molt pocs i fins i tot

desentonaven. La feina que ha fet conjuntament la comunitat matemàtica catalana per fer arribar al gran públic l'amplíssim ventall de sortides laborals, la creixent demanda de matemàtics i la plena ocupació (molt valorada des de la crisi del 2008, crec) ha fet que la situació s'hagi girat com un mitjó. Vull remarcar, a banda de la informació sobre les sortides laborals, l'esforç per fer gaudir del descobriment de les matemàtiques a les noies i els nois de secundària (Cangur, Olimpíades, Dissabtes de les Matemàtiques, Matefest, Esprint, Tallers, MMACA, etcètera). També ha contribuït en el canvi del perfil dels estudiants el disseny del nou pla d'estudis, inclosa la doble titulació de Matemàtiques i Física.

Per fi molts estudiants que antigament anaven a estudiar enginyeries perquè no volien dedicar-se professionalment a la docència ni a les matemàtiques pures ara són conscients que podran fer finances o enginyeria o màrqueting o estadística o moltes altres disciplines després

### **Margarida Espona Donés** **Departament de Matemàtiques, UPC**

En primer lloc, cal fer notar que alguns aspectes són prou generals per ser comuns a tots els ensenyaments universitaris de matemàtiques, però és clar que en d'altres només conec la realitat del meu entorn proper, que ha estat la docència de matemàtiques en l'enginyeria. Per exemple, la desaparició de la massificació a les aules que vam patir a finals dels vuitanta i principis dels noranta és general, i en el meu cas va coincidir amb la meva incorporació a un centre pilot on vam implantar la quadrimestralitat de les assignatures i l'avaluació continuada en un context de grups classe reduïts, abans que a la resta de centres. Un altre canvi general ha estat la incorporació de les TIC, tant com a font de recursos, com a canal d'interacció i eina de treball a l'aula.

En aquests darrers vint-i-cinc anys hem viscut diversos canvis de plans d'estudis, que ens han fet replantejar els continguts de les assignatures. Però el gran canvi va tenir lloc quan es va implantar l'Espai Europeu d'Educació Superior (EEES), que va suposar la posada en marxa de graus i màsters i la desaparició de

de passar-s'ho bomba estudiant el Grau de Matemàtiques i, en tot cas, cursant després un màster professionalitzador.

La conseqüència de tots aquests canvis ha estat que la nota de tall de tots els graus de Matemàtiques ha pujat. Així, els estudiants actuals estan molt motivats, a més de ser molt més madurs, treballadors i eficients (com indica la nota d'accés). És evident que tenir un grup gran d'estudiants apassionats per les matemàtiques i amb capacitat alta millora molt l'ambient a classe i el rendiment general. Hi ha alegria i resulta estimulants per a tots plegats, professors i estudiants. Un d'aquests estudiants excel·lents, de primer curs, em va dir un cop que estava content perquè per fi tenia companys que entenen els seus acudits. No tots els estudiants són així, segueix havent-n'hi que pateixen, però no tants i no de manera constant.

En resum, suposo que sí, que la metodologia ha canviat en els darrers anys, si més no, s'han posat condicions perquè canviï.

les antigues enginyeries tècniques. Com tothom sap, va ser un moment on vam sacsejar-ho tot, amb molts debats interns tant de continguts com de metodologies. Crec que la pregunta que ens plantegeu va per aquí: què n'ha quedat de tot aquell canvi?



Pel que fa als continguts, a més de l'obligada retallada o reubicació de temes que ens imposa la limitació del nombre de crèdits de cada assignatura, penso que hem aconseguit coordinar-nos molt millor amb les altres matèries no matemàtiques dels plans d'estudis. La solució



òptima no sempre és possible perquè també intentem donar coherència temàtica interna als continguts d'una mateixa assignatura i en la seva seqüenciació. D'altra banda, aquesta coordinació també té més conseqüències a l'hora de planificar l'enfocament de les assignatures. Tots sabem que un mateix tema es pot abordar des d'un punt de vista molt general, cosa que ens acostuma a agradar als matemàtics, o bé particularitzant en els casos més usuals (i menys abstractes) que són els que els seran útils a les aplicacions de l'enginyeria. Una altra millora ha estat la incorporació de matèries multidisciplinàries impartides conjuntament amb altres departaments, habitualment assignatures optatives.

Pel que fa a la metodologia, m'agradaria recordar unes classes que vaig rebre a la Facultat de Matemàtiques de la UB, que tenien el nom de «classes holandeses» perquè el professor (de teoria) era holandès. Consistien a proposar dos problemes i deixar que els estudiants els penséssim a l'aula comentant-los amb els companys, mentre dos professors (de problemes) ens resolien els dubtes i ens donaven pistes a la pissarra quan calia. Durant uns quants anys vaig pensar que era l'única alternativa a la classe expositiva (hi ha qui encara en diu «magistral») que existia. I asseguraria que molts companys meus també... i les classes holandeses ni tan sols surten al Google! Amb això vull dir que el professor novell que s'incorpora a la docència té una inèrcia important a reproduir el que ha rebut i si no té formació i suport per portar a terme metodologies actives a l'aula, és difícil que ho faci.

D'altra banda, la implantació de l'EEES va significar que els centres haguessin d'omplir

apartats dels documents de verificació dels plans d'estudis on havien de justificar quines competències transversals (treball en grup, autoaprenentatge, entre altres) es treballaven i com s'avaluaven en cada assignatura. És clar que això va ser un trasbals a l'hora de posar per escrit la metodologia de cada assignatura quan no hi havia consens per escriure segons què. Vam aprendre a disfressar de metodologia activa la que no ho era i a suavitzar la que era massa activa per a alguns.

També va significar un intercanvi d'experiències amb altres universitats interessades a conèixer el pla pilot que vam portar a terme al nostre centre, en particular a les matemàtiques. I això va ser molt enriquidor i gratificant.

Què n'ha quedat? Em ve al cap la frase d'un professor en una sessió de debat sobre les matemàtiques a l'EEES: «El teorema de Pitàgores sempre serà el teorema de Pitàgores». Un dels ponents li va respondre que efectivament, però hi ha moltes maneres d'enfocar-lo. Una altra frase que era un clàssic és la que deia que «els estudiants són cada vegada pitjors». Diuen que Sòcrates ja deia coses semblants quan parlava de la joventut. Penso que tot això ja ens ho mirem d'una altra manera.

Potser el que dona més sentit a tot plegat és veure que la interacció personal entre estudiants i entre professor i estudiant segueix tenint més valor que el vídeo dels millors professors del món explicant el mateix tema a Youtube. I el que tinc clar és que ningú creu que sigui un matemàtic pitjor per culpa d'aquelles classes holandeses, on «només» fèiem dos problemes. I, en canvi, tots en tenim un bon record.

## Marta Peña Carrera

### Sotsdirectora de l'Institut de Ciències de l'Educació, UPC

Els canvis que s'han introduït a l'ensenyament universitari de les matemàtiques en els darrers vint-i-cinc anys han tingut molt a veure amb la introducció de les TIC. Això ha permès, d'una banda, facilitar metodologies d'autoaprenentatge, gràcies a la utilització de MOOC, vídeos de suport a la docència... De l'altra, també s'han incorporat, a nivell elemental, eines de

programari matemàtic, com Matlab, Octave, Maple, Mathematica, entre altres.

Els canvis esmentats s'han implementat en la metodologia, tant pel que fa a l'ús de les TIC, com per les noves metodologies docents desenvolupades, sorgides especialment arran del pla de Bolonya.

Les tasques pendents en l'ensenyament universitari de les matemàtiques haurien d'estar més orientades als continguts, no tant a la metodologia.

En aquesta línia, la contextualització de les matemàtiques mitjançant aplicacions immediates en les disciplines de la titulació on s'estan impartint és un punt clau. D'aquesta manera, els estudiants universitaris se sentiran identificats amb la professió que han triat i trobaran que tot el que aprenen és útil per al seu futur professional.

Ja en tenim alguns precedents, com el professor Claudi Alsina a la Universitat Politècnica de Catalunya en l'àmbit d'arquitectura, però no se n'ha fet un seguiment en altres àmbits tecnològics.

Així mateix, aquest fet permetria l'ús de les eines de programari matemàtic ja emprades actualment, però a un nivell més avançat, que requeriria la introducció de càlcul numèric per a la resolució de problemes contextualitzats i més propers als que l'alumnat es trobaria en el món laboral.



En la línia de la contextualització de les matemàtiques, a la Universitat Politècnica de Catalunya s'està organitzant des del curs 2017-2018 un seminari, titulat «Seminari de contextualització de les matemàtiques a les

### **Jordi Saludes** **Departament de Matemàtiques, UPC**

Parlaré de l'ensenyament de les matemàtiques en els estudis d'enginyeria, que és el cas que conec. En aquest camp —volgudament o no— l'objectiu principal és saber reconèixer i emprar la fórmula més convenient per a cada problema. No vull dir que això sigui per intenció del

carreres tecnològiques», amb la col·laboració de l'Institut de Ciències de l'Educació, la Facultat de Matemàtiques i Estadística i el Departament de Matemàtiques. L'objectiu d'aquest seminari és il·lustrar l'ús de les matemàtiques en diferents àrees tecnològiques. Han estat ponents d'aquest seminari tant professorat de departaments matemàtics (com el professor Josep Ferrer (Universitat Politècnica de Catalunya) o Rafael Bru (Universitat Politècnica de València), com també professorat de departaments tecnològics; aquest professorat ha posat l'èmfasi en quines són les matemàtiques que es fan servir a les seves assignatures. Pel que fa a l'ús de les TIC i al càlcul numèric, han intervingut en el seminari abans esmentat la professora M. Rosa Estela (Universitat Politècnica de Catalunya) i el professor Antoni Susín (Universitat Politècnica de Catalunya), respectivament. La informació actualitzada d'aquest projecte es pot trobar al web <https://fme.upc.edu/ca/la-facultat/activitats/2018-2019/seminari-contextualitzacio-de-les-matematiques-a-les-carreres-tecnologiques-de-la-upc-1/Programa%20Seminari%20Contextualitzacio%20Mates>.

Finalment, una reflexió que convindria que ens plantegéssim tots plegats. En aquests darrers anys la docència ha estat poc estimulada institucionalment, ja que s'ha posat més èmfasi en la recerca. Ha arribat l'hora que la docència ocupi el lloc que es mereix, i que tingui una valoració més elevada. Si s'inverteixen els recursos i els mitjans necessaris en la docència, el professorat ens hi podrem dedicar de manera més entusiasta i motivadora, i això repercutirà en un alumnat més satisfet i més ben preparat per al seu futur professional. En definitiva, una societat millor.

professorat, sinó que els alumnes han adoptat aquest mètode perquè els va bé per aprovar. Plantegem problemes que són similars cada any i això fomenta l'estratègia que, un cop hom sap resoldre un problema de cada tipus, l'èxit està garantit.

En general tota la docència està més fragmentada: hem passat de cursos anuals a quadrimestrals (en algun cas, bimensuals) i el nombre d'avaluacions s'ha multiplicat. L'avaluació continuada s'havia pensat com una avaluació formativa (que permetia a l'alumnat saber si anava per bon camí), de manera que la prova de final de curs era la que donava l'avaluació definitiva. A la pràctica i probablement causa de la proliferació d'aquestes proves parcials, les avaluacions formatives tenen poca assistència si no són recompensades amb punts. En molts casos és la mateixa escola la que exigeix que hi hagi més d'una prova sumatòria al llarg del curs.



Pel que fa al contingut, els procediments han guanyat molt de pes a costa de les explicacions: fem menys demostracions i, moltes vegades, només en donem la idea general i tampoc ho exigim a les proves sumatòries.

Això passa en un context en què el progrés del *machine learning* i el Big Data ha fet que els models formals hagin perdut valor i, en conseqüència, les explicacions. Tal com deia N. Chomsky:

*«There is a notion of success...which I think is novel in the history of science. It*

*interprets success as approximating unanalyzed data»*

Pel que fa a les tecnologies, no podem passar per alt la popularització dels projectors, que han fet oblidar les transparències. Això ha donat més dinamisme a la classe (val a dir que jo he vist autèntiques filigranes fetes amb transparències), però l'avantatge bàsic és que hom pot canviar fàcilment el contingut i fer-lo a mans dels estudiants immediatament.

El sistema que em va bé és tenir els enunciats dels teoremes i les definicions projectades a partir del material que els estudiants ja tenen, mentre que a la pissarra explico la idea de la prova o en desenvolupo els exemples.

Una cosa que era impossible fa 25 anys i que ara permeten programes com Geogebra i els sistemes de càlcul algebraic és mostrar gràficament o en detall les propietats dels objectes del discurs

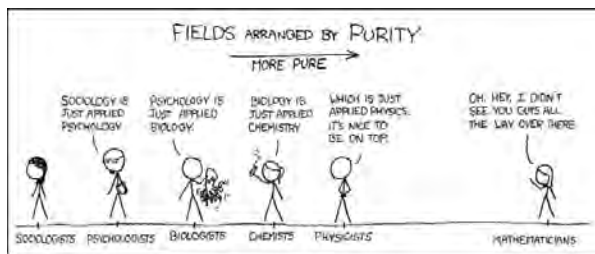
El que em sorprèn és com n'estan d'enganxats els alumnes a la calculadora: una andròmina de preu excessiu i que es pot substituir en tots els casos per una aplicació al telèfon mòbil. Possiblement no s'ha fet prou esforç a batxillerat a presentar l'ordinador com una eina de càlcul i com a introducció a la programació: una habilitat que serà tan essencial en el futur com saber llegir o escriure.

En el futur espero veure, amb la introducció dels robots conversacionals, l'aparició d'assistents personals que interactuaran amb l'alumnat i el guiaran durant la resolució dels problemes. És aquí on hi veig l'oportunitat de recuperar el raonament; hom podrà posar problemes que exigeixin justificacions i aquests assistents seran capaços de jutjar-les, de mostrar-ne les mancances i de suggerir vies per resoldre els entrebancs.

## Interdisciplinarietat en les matemàtiques

Aleix Ruiz de Villa  
Data scientist

Les matemàtiques són una de les ciències més antigues, sinó la que ho és més. Són el llenguatge comú de totes les altres ciències. Això dona una gran versatilitat als matemàtics per poder apropar-s'hi i que el camí per aprendre-les sigui més curt. Una visió estesa de les matemàtiques amb la qual alguns de nosaltres ens hi identifiquem, és la recollida pel clàssic còmic *xkcd*.



Font: <https://xkcd.com/435/>

Malgrat tenir una llarga història i ser present en totes les altres ciències, les col·laboracions amb altres àrees de coneixement, i en particular en el món empresarial, són més aviat reduïdes. Així que ens podríem preguntar, ens interessaria tenir més col·laboracions? Perquè no les tenim? Quines són les limitacions pròpies de les matemàtiques i quines són pròpies de l'entorn social on vivim?

### Són les matemàtiques autosuficients?

Les matemàtiques són autosuficients, però els matemàtics no. Una gran part de les matemàtiques poden desenvolupar-se sense necessitat d'altres àrees de coneixement. Tenir contacte amb altres disciplines pot estar bé per motivar problemes interessants, però en general no és un requeriment. Les matemàtiques tampoc requereixen el nivell d'experimentació d'altres ciències, i, per tant, tampoc necessiten la mateixa magnitud de recursos materials.

Tot i això, els matemàtics tenim un context social i unes necessitats concretes. Per

començar, necessitem un sou: algú que ens financi la nostra activitat matemàtica. I això passa per convèncer la societat que el que fem els és útil. Però amb el sou tampoc n'hi ha prou. Necessitem poder disposar d'oportunitats de créixer o poder desenvolupar-nos en àrees noves.

Als matemàtics ens agrada molt la llibertat tècnica: poder escollir en quins temes treballem i en quin moment. Això no és cap caprici. El terreny de les matemàtiques és complex i incert. És molt difícil saber quan s'obtidran resultats i quins seran. Per això la llibertat de gestionar la feina és un element totalment necessari. Però amb la llibertat no n'hi ha prou. L'exemple paradigmàtic és una persona que està al mig del desert. Té absoluta llibertat per prendre decisions, però una capacitat molt reduïda per poder canviar la seva situació. Maximitzar la llibertat de decisions no implica maximitzar la capacitat de canviar la situació d'un mateix.

Atès que els matemàtics tenim un context social, fàcilment ens pot interessar poder canviar la nostra posició en aquest context. Tenir més reconeixement social implica tenir més recursos, que s'inverteixen a desenvolupar més matemàtiques. Alhora, aquestes matemàtiques haurien de tenir més repercussió social i, per tant, més reconeixement. Així es crea una roda, on incrementar la col·laboració amb la societat beneficia les matemàtiques i aquestes beneficien la societat. I aquí arribem al punt on els matemàtics necessitem de les altres disciplines, més enllà de l'interès de motivar nous problemes. Necessitem involucrar-nos en projectes que tinguin algun impacte, utilitat o influència social. Evidentment, és probable que sempre hi hagi una part de les matemàtiques que no es relaciona amb altres camps. En aquest sentit, potenciar aquelles parts de les matemàtiques que estiguin més en contacte amb les aplicacions pot donar més prestigi social i indirectament potenciar les àrees menys aplicades i socialment desconegudes.



## Diferents àrees de coneixement, diferents punts de vista

La visió que mostra el còmic *xkcd*, tot i ser certa, no és útil a l'hora d'establir relacions amb altres disciplines. En el món aplicat, la puresa és un valor desitjable, però no és un valor prioritari, més enllà d'aportar simplicitat i claredat. Les discussions en el món empresarial no són al voltant de veritats o falsedats, sinó sobre utilitats, necessitats i prioritats (normalment per limitació de recursos). En aquest sentit, podem recuperar la frase del estadístic G. Box «*All models are wrong, but some are useful*».

De la mateixa manera que un atlas recobreix la Terra amb un conjunt de mapes, sense que cap dels quals pugui descriure correctament la totalitat, podem pensar que cada una de les àrees de coneixement humà descriu una part de la realitat humana. Per a crear un mapa necessitem un origen de coordenades on pot descriure's el mapa amb exactitud. I com més ens allunyem de l'origen, més precisió perdem i comencem a solapar-nos amb altres àrees. Amb aquesta analogia, podríem pensar que cada àrea de coneixement té uns punts de referència a través dels quals es parametriza la seva realitat. Aquests punts de referència serien aquelles coses en les que un es fixa primer. Aquells elements que es prioritzen sobre els altres. Aquestes prioritats no són un caprici. Són el resultat d'haver treballat amb una faceta de la realitat durant molt de temps, i pensar en termes d'aquesta referència simplifica el treball. Per exemple, podríem pensar en les diferències entre psicòlegs i sociòlegs. Els primers prenen com a referència l'individu, mentre que els segons prenen com a referència el grup. Així, un mateix conflicte, uns el poden interpretar com a resultat dels comportaments individuals, mentre que els altres el poden interpretar com a resultat de les dinàmiques del grup.

Amb aquest punt de vista, ens podríem preguntar, en cada àrea de coneixement, quins són els seus punts de referència? Quines són les seves prioritats? L'objectiu no és donar una descripció de la realitat. Més aviat és millorar la comunicació i entesa amb altres disciplines. Podem parlar de generalitzacions, sempre que ens sigui útil per entendre millor les decisions que prenen els altres grups.

Per exemple, podríem parlar d'una certa dualitat entre enginyers i científics. Els enginyers, per tractar un problema, primer fixen el temps que hi poden dedicar (o els recursos) i intenten maximitzar la qualitat del resultat. Els científics ho fan al revés. Primer fixen la resposta que volen obtenir i després volen minimitzar el temps que hi volen dedicar.

Els matemàtics tenim alguns punts en comú amb els informàtics. Tots dos treballem amb pensament seqüencial: si un punt no és correcte, tot el que ve després no funcionarà. Això contrasta amb el procés per treballar amb aproximacions, amb les quals els físics i enginyers tenen força més experiència, on un fet pot ser aproximadament cert i això ja és suficient per continuar treballant. Un altre punt en comú amb els informàtics és l'objectiu de desenvolupar eines. Els teoremes tenen una forta similitud amb els mòduls de programació: s'agrupa la gestió d'una sèrie de casos sota un mateix paraigua i s'empaqueta perquè altres persones ho puguin fer servir.

Els càrrecs executius en empreses (típicament amb formació d'administració d'empreses, economia o enginyeria) solen tenir unes prioritats compartides. Part de la seva feina és la gestió de recursos (obtenció i distribució) i un punt de vista orientat a l'explotació: repetir una tasca coneguda amb l'objectiu d'obtenir-ne beneficis. Això fa que a vegades prioritzin els resultats per sobre del camí escollit per obtenir-los. En canvi, la naturalesa de les matemàtiques és l'exploració, on el camí en si mateix té rellevància, de vegades fins i tot per sobre del resultat. Això és a causa de la necessitat de la gestió de la complexitat i incertesa en les matemàtiques. Si només fos important el resultat, en molts casos el procés de recerca seria feixuc i insostenible al llarg termini.

La relació amb la recerca i l'exploració fa que, a més de la tasca de desenvolupar eines, en les matemàtiques tingui importància la tasca de buscar noves maneres de pensar. És a dir, trobar nous punts de referència en les noves àrees de manera que es pugui desenvolupar la intuïció. La capacitat analítica per desgranar i aprofundir en els problemes hi té un paper vital. Entendre pot ser útil per optimitzar processos, però és totalment necessari per canviar la manera de pensar. En aquest sentit, si una

empresa no té interès a explorar noves vies, sinó que estigui centrada en l'explotació de tècniques ja conegudes, és probable que el pensament i les capacitats matemàtiques no li aportin gaire valor.

## Rols dins de l'empresa

És interessant veure com els enginyers i els informàtics han aconseguit al llarg dels anys posicionar-se a les empreses. Un altre bon exemple que s'ha de tenir en compte són els estadístics que han aconseguit tenir un paper influent en el món biomèdic. Per posicionar-se que com a comunitat, hi ha unes posicions i camins professionals més o menys estandarditzats i entesos per la resta de l'empresa. Per exemple, és habitual trobar un CTO (*chief technology officer*) responsable de la part informàtica de les empreses. Com més jeràrquica sigui una empresa, més necessari és que aquestes posicions tinguin sensibilitat matemàtica (o idealment que hi hagi una posició del mateix nivell en temes de recerca, exploració...), ja que les decisions passen només per aquestes posicions.

Una de les parts més difícils de gestionar per part dels matemàtics en equips interdisciplinaris és la gestió d'expectatives. Per treballar en equips interdisciplinaris és un requeriment tenir interès per les altres àrees de coneixement. També és necessari tenir sensibilitat envers els temps de desenvolupament i la necessitat que els resultats siguin útils per a l'equip. En aquest context, és habitual trobar gent que considera que un matemàtic és massa teòric i no aporta valor. Tot i que els matemàtics hàgim de fer

un procés per apropar-nos a les aplicacions, aquest tipus d'argumentacions solen ser per interessos polítics en rols propers a la branca d'explotació de les empreses, que no necessiten innovar. Cal explicar a les empreses quins són els temps de desenvolupament habituals en projectes relacionats amb les matemàtiques i aclarir quins són els beneficis que en poden esperar, típicament diferents dels que aporten altres àrees dels grups de treball.

Les matemàtiques van tenint relació amb àrees tradicionalment oposades. Els periodistes en són un exemple. A diferència dels científics, que ens centrem i aprofundim en un tema, els periodistes han de tractar amb una gran diversitat de temes amb un temps reduït. Malgrat això, la disciplina de periodista de dades, en la qual s'ha de programar, tractar i interpretar dades, està creixent. Un altre exemple seria el màrqueting. Històricament, aquests departaments han estat en contacte amb l'estadística a través dels estudis de mercat. Actualment, en el món del màrqueting digital, cada vegada hi ha eines més sofisticades que depenen de tècniques matemàtiques. El disseny i el desenvolupament d'aquestes eines són un bon exemple d'interdisciplinarietat entre matemàtics, informàtics i equips de màrqueting. D'una banda, es requereixen els algorismes d'optimització. Però no són suficients. De l'altra, la interacció entre equips és vital per desenvolupar una plataforma informàtica que sigui intuïtiva i fàcil de fer servir per als usuaris finals (personal de màrqueting). El resultat conjunt determina l'adopció i la difusió que tindrà en el mercat i, per tant, el seu èxit social.

## Entrevista a Jimena Llopis, directora de The Alpha Group

Sara Riera

Llicenciada en Matemàtiques i Enginyeria Industrial  
Màner d'Estratègia Corporativa a Seat

Jimena Llopis és la directora de The Alpha Group, un grup empresarial global que proporciona assessorament de gran nivell als fundadors i directores de pimes per aconseguir els seus reptes i fer créixer les seves empreses. El seu objectiu principal és potenciar el desenvolupament dels alts directius mitjançant la intel·ligència

col·lectiva creada en consells executius externs. A més, la Jimena és *líder coach* a Musarion, on col·labora i lidera programes centrats en el canvi de cultura, el *coaching* executiu, el desenvolupament d'habilitats de comunicació i lideratge, la cohesió de grups, el tractament de la immunitat al canvi o la fidelització del talent.

## Primer de tot, parla'ns una mica de tu, Jimena.

Des de ben petita volia ser matemàtic. Bé, matemàtic i músic. Vaig estudiar Matemàtiques, vaig començar la doble titulació amb Informàtica, però em vaig adonar que el que m'agradava més era la matemàtica. Vaig treballar en el món acadèmic durant vint anys, a Venèçuela, als Estats Units i aquí a Barcelona, a CRM i a la Pompeu Fabra. Vaig fer el meu doctorat a Venèçuela i la meua etapa postdoctoral en el MIT (EUA) com a *visiting scholar*. Les meves línies de recerca principal van incloure la lògica, la teoria de conjunts, la combinatòria i la intel·ligència artificial. La meua tesi va estudiar la lògica matemàtica. També vaig treballar en la connexió de la lògica amb la intel·ligència artificial i en la programació lògica.



## Una carrera molt teòrica...

Sí, realment m'encantava i vaig venir aquí a Barcelona amb una beca de l'Agència de Cooperació Internacional per treballar amb els grups de lògica matemàtica. Barcelona em va encantar, i hi vaig tornar. Vaig decidir prendre'm un any sabàtic i, després, vaig treballar en una empresa familiar d'alta innovació: em vaig encarregar d'obrir la unitat d'internet i telecomunicacions i, també, vam crear una *spin-off* en la qual generàvem productes molt innovadors a partir de l'anàlisi matemàtica de la música.

## Com va ser la transició de la recerca al lideratge empresarial?

Jo diria que tinc com tres vides professionals: l'acadèmica, és a dir, el món de les idees i de

la recerca; en segon lloc, com aplicar aquestes idees, més vinculada al món empresarial i a la innovació, que és la part que connecta amb l'etapa en l'empresa familiar; i després em vaig adonar que, en realitat, el més important per a mi era poder connectar aquestes idees amb les persones, i ajudar a potenciar els talents de cadascú. Per adaptar-nos a aquesta nova era de revolució digital hem de centrar-nos en les persones «*human-centric*», necessitem ser capaços d'«autotransformar-nos» per aconseguir el nou lideratge per a aquesta època. No estem en una època de canvis sinó en un «canvi d'època». En la transició de la recerca a l'empresa vaig haver d'aplicar la innovació a la vida pràctica i em vaig adonar d'un fet molt important: has de saber pactar amb la imperfecció, perquè han de sortir els productes encara que no siguin perfectes. De les moltes idees d'innovació que es generaven, només se'n provaven una o dues... I va ser d'una de les idees que va sortir la *spin-off* d'anàlisi matemàtica de la música. Va ser molt interessant, vaig poder unir les meves dues passions, i vam aconseguir descobrir patrons de gust, cosa que va ajudar molt els artistes a ser més arriscats en les seves composicions musicals. Vam començar amb B2C, dirigida als artistes i per la qual vam obtenir diverses patents i premis d'innovació, tant als EUA com a Espanya. Després ho vam vendre a una empresa anglesa. Fins i tot es va generar un cas d'estudi a Harvard sobre nosaltres i que, avui dia, encara s'ensenya a l'IESE.

## És curiós que d'alguna cosa tan artística com la música es pugui inferir tota la ciència que hi ha al darrere.

És ciència pura. Analitzàvem com fer la desconvolució espectral de l'ona musical i, sobretot, filtrar quins paràmetres eren més importants per després utilitzar mètodes per fer-ne una «clusterització» topològica adequada. Va ser molt bonic poder veure que el que va desenvolupar l'equip d'innovació es podia aplicar de forma tangible.

## I després de vendre l'empresa, quin va ser el projecte següent?

A mi sempre m'ha encantat gestionar equips i fer sortir els talents de les persones. Ho feia a escala empresarial i, per curiositat, em vaig

inscriure a una certificació com a *coach executiu*. Va ser molt interessant perquè l'enfocament estava basat en el «*coaching ontològic*», que és un tema que en realitat està molt lligat a la lògica matemàtica. Sabia que, després de vendre l'empresa, volia fer algun projecte vinculat a les persones, encara que no tenia clar què. Per això, em volia agafar un temps per pensar-ho. I just quan estàvem venent l'empresa es va presentar una oportunitat: una persona molt lligada a l'empresa em va oferir participar en un projecte preciós en la seva empresa de *coaching*, que es dedica a inspirar líders. A mi em feia una mica de respecte, ja que encara no havíem tancat la venda de l'empresa i, a més, mai havia treballat com a *coach*, però em va convèncer que, en realitat, jo ja ho feia de forma natural amb els meus propis equips. D'aquesta manera, des del 2012 vaig decidir professionalitzar el que de forma intuïtiva i espontània ja estava fent, ajudar les persones i equips a potenciar els seus talents i el seu lideratge. He après molt amb aquesta persona i segueixo aprenent, ja que és molt inspiradora. I la veritat és que m'encanta. Treballo per ajudar a la transformació del lideratge, a donar suport a equips d'alt rendiment... Sobretot em dedico a aquest canvi de *mindset*, que tanta falta fa en el món actual!

### **Quins creus que són els grans reptes pels quals ens hem de transformar com a societat, i com els matemàtics hi podem contribuir de forma diferencial?**

L'*autotransformació* necessita un canvi en el nostre nivell de complexitat mental. Té dos aspectes importants: cal treballar amb la incertesa (els líders i les persones en general no estem gaire acostumats a conviure amb ella) i requereix una connexió de tots els aspectes de l'ésser humà: part racional, emocional i intuïtiva; la intel·ligència racional, emocional, i social, així com la intel·ligència col·lectiva, i també posar en qüestió els nostres valors per poder canviar les nostres creences limitadores. Les persones estem poc acostumades a integrar tots aquests elements. La ment matemàtica té una visió global, connecta molts punts de vista diferents, està en contínua cerca de nous reptes. Un investigador matemàtic està plantejant contínuament noves preguntes i incerteses

més que trobant solucions als problemes. Els matemàtics estem acostumats a les paradoxes, així com a entendre que des d'un univers pot haver-hi diverses extensions en les quals en unes pots demostrar el contrari que en unes altres. Podríem dir que l'investigador matemàtic (a partir del teorema de Gödel) entén que des d'un univers donat hi ha coses que no es poden decidir dins del mateix univers, i que tan sols es poden veure les aproximacions d'elements que «viuen» en una extensió d'aquest univers. De la mateixa manera, en la nostra realitat actual estem en una revolució on podem veure aproximacions del que ve, però fins que no transitem pel camí no sabrem a quina extensió de l'univers estem arribant. En aquest sentit, penso que la ment matemàtica està molt preparada, justament, per a aquests nous temps.

### **Aquesta millor preparació es tradueix en una millor acceptació en el mercat laboral, és a dir, més ocupació? O bé es visualitza en el rendiment, una vegada el llicenciat s'incorpora al món laboral?**

D'una banda, comença a haver-hi molta necessitat dels anomenats «treballadors del coneixement», és a dir, es necessiten treballadors amb una gran capacitat d'aprenentatge i adaptació. Aquesta capacitat d'obtenir coneixement rellevant i aplicable de dades (inclosos *big data* i intel·ligència artificial) també és un aspecte important del potencial matemàtic, i no només per crear productes, sinó també com a eines d'ajuda al procés de la presa de decisions en gestió. D'altra banda, la capacitat d'adaptar-se a nous reptes, tan valorada actualment, és precisament el que caracteritza la vida dels matemàtics i dels científics en general. Però jo encara aniria una mica més enllà. El matemàtic comença a ser molt buscat perquè veu les coses d'una forma original, diferent. Fins i tot, en els consells d'administració, aporten una visió diferent. Hi ha molts CEO famosos que d'alguna manera tenen una formació matemàtica, encara que després hagin fet MBA o altres formacions en negocis o no. Un exemple n'és el cofundador de Google, Sergey Brin, que, per cert, i com a curiositat que no fa gaire vaig saber, el mateix nom de Google porta aquesta component matemàtica més personal: el seu origen és googol ( $10^{100}$ ). Però més enllà de



l'anècdota del nom, hi ha molts més matemàtics com ell. Per exemple, Jeffrey Inmelt, CEO a General Electric, matemàtic amb MBA a Harvard, que diu que «usa la seva part matemàtica diàriament, mentre que la part del MBA no tan diàriament». I la llista podria ser molt més llarga, fins i tot, sense creuar l'oceà, tenim, per exemple, Rosa García que fins aquest any va ser CEO de Siemens Espanya i que sempre comenta que «la societat sencera s'ha de reinventar». Francament, no crec que sigui pura casualitat: és una combinació de tot. És cert que aquesta gent té, a més, altres fortaleses però penso que aquesta visió global del matemàtic també ha influenciat per aconseguir el lloc on són.

### **Creus que aquesta tendència de tenir diversos exemples de màxims directius amb formació matemàtica és a causa de l'entorn més canviant que vivim, o creus que abans ja es donava i no n'érem tan conscients?**

Amb aquesta revolució 4.0 crec que, en general, ha crescut aquesta tendència. Hi ha estudis ([https://cincodias.elpais.com/cincodias/2018/07/09/companias/1531135542\\_579443.html](https://cincodias.elpais.com/cincodias/2018/07/09/companias/1531135542_579443.html)) que indiquen que a Anglaterra i a França, per exemple, un 9% del total de les ocupacions en empreses usen habilitats matemàtiques, i generen un 16% del PIB a Anglaterra i un 15% del PIB a França. Això abans no passava, i és molt rellevant. Justament ara, com que els canvis van molt ràpid i, com dèiem, hi ha molta incertesa, és quan més es necessiten perspectives diferents i originals. A més, els alts directius s'adonen que han de potenciar cada vegada més el lideratge col·laboratiu, és a dir, que sols no poden a causa, precisament, de l'entorn tan canviant.

### **Tampoc ha de ser fàcil trobar solucions amb tanta complexitat, incertesa i velocitat de canvi.**

Tens tota la raó. Els anomenats «ambients VUCA» (volàtils, incerts, complexos i ambigus) són tot un repte, però la ment matemàtica se'n surt molt bé en la incertesa i, d'altra banda, està acostumada a resoldre problemes complexos, a entendre la complexitat de coses que ni tan sols s'han vist, a obrir camins que encara no s'han explorat. En aquests ambients

tenim molts dels elements que poden ajudar que l'ésser humà no se senti tan incòmode en la velocitat, en la incertesa, en la complexitat.

### **I no corre el risc de fer-ho des d'un punt de vista massa abstracte, poc pràctic?**

El matemàtic és capaç d'abstreure's i veure moltes relacions entre aspectes que podria semblar que no estan relacionats, acostant-se a solucions pragmàtiques. Moltes vegades s'estan dient les mateixes coses però des de punts de vista diferents. Per tant, el que cal avui dia és connectar els diferents llenguatges.

### **Aquest aspecte és únic i singular del matemàtic?**

És força singular en el sentit de l'abstracció i de la capacitat de bregar amb la complexitat i amb la incertesa, però no és únic dels matemàtics o dels científics, i justament el que la societat necessita són perspectives ben diferents. Per exemple, els llenguatges dels dissenyadors o dels artistes, en general, proporcionen també perspectives diferents; amb la qual cosa, abstraient-nos, com a matemàtics, podem dir que la capacitat d'aportar no és única dels matemàtics, per descomptat, sinó diferent. Hi ha un estudi relativament recent, encara que no és concloent i està ressenyat a Scientific American (<https://www.scientificamerican.com/espanol/noticias/en-que-se-diferencia-el-cerebro-de-un-matematico-del-de-un-simple-mortal/>), que revela que el cervell matemàtic no utilitza tant la part del cervell associada al processament del llenguatge, sinó que «un alt nivell de reflexió matemàtica recicla regions del cervell associades amb un coneixement evolutivament antic de nombres i espai». I el que és molt interessant, també, parlant dels artistes, és que quan un matemàtic veu la bellesa en una demostració matemàtica s'activen en el cervell els mateixos impulsos que s'activen quan es gaudeix d'una pintura meravellosa o quan s'escolta una música excepcional.

### **Curiós...**

No és gens concloent, però sí que és interessant que la part en la qual un matemàtic veu la

bellesa i l'elegància en una demostració està connectada amb l'estètica artística; i, d'altra banda, la reflexió matemàtica abstracta usa zones del cervell que aparentment no són les que es pensava originalment.

### **Heus aquí un aspecte de la connexió entre les matemàtiques i la música, una vegada més...**

De fet, la música, sobretot la clàssica, també té molta estructura matemàtica.

### **Ja ho diuen que alguns matemàtics i alguns músics són genis (... i bojos!).**

(riu) És cert. Jo n'he conegut molts que freguen la genialitat o la bogeria i, sí, hi veig alguna semblança. No és una generalització però sí que hi ha gent, sobretot entre els qui dediquen la seva vida per complet a l'art o a la matemàtica, que desenvolupa la capacitat de tenir idees genials; encara que també tots diuen, com deia Picasso, que el 80% és la feina. És com una intuïció o inspiració que no ve sola, que hi és present. Penso que una part del que anomenem «intuïció» prové d'aquesta capacitat de connexió: tens molts elements en l'inconscient i el cervell els connecta. Jo personalment m'atreviria a dir que una part important de la meua tesi de doctorat la vaig fer dormint! I em despertava i ho escrivia per no oblidar-ho. De manera que diria que sí, que tens la inspiració artística o matemàtica, però està barrejada amb com ho vas relacionant tot.

### **Malgrat que la frustració també és més gran quan la idea o la genialitat no aconseguen sortir, tot i que s'intenti insistentment.**

Això és molt rellevant. El matemàtic és molt «resilient», quan alguna cosa no li surt, segueix, prova, explora algun altre camí, aprèn i obre nous camins. Aquesta resiliència és molt necessària en aquesta nova era.

### **Ens perdem en els detalls de vegades?**

Bé, crec que és un complement: el matemàtic té la visió global però, a la vegada, és molt detallista i va al detall, i d'aquesta manera tens els dos aspectes. «*The devil is in the details*»,

deia un d'aquests genis matemàtics que vaig tenir l'oportunitat de conèixer.

### **Creus que el CEO de Google, de vegades, es pot permetre que li surti la seva part matemàtica i es perdi en els detalls per estar segur d'una decisió?**

Possiblement aconseguen combinar tots dos aspectes, el detall i la visió global, amb el balanç adequat, depenent de com de crític sigui el tema i del temps disponible. És veritat que en el món acadèmic es requereix molta més ciència pura i solidesa mentre que en el món empresarial, com hem comentat, cal pactar amb la imperfecció. Per això és molt necessari tenir un alt grau d'intel·ligència emocional.

### **Quina gran àrea de creixement la intel·ligència emocional!**

Penso que no tan sols els matemàtics, sinó que totes les persones en general estem poc acostumades a desenvolupar la intel·ligència emocional. S'ha de treballar la intel·ligència emocional, cal ser capaços de tenir un autoco-neixement, de connectar amb tu mateix i amb l'altre des del cor, tenir capacitat d'autolide-ratge i poder canviar el *mindset* cap la teua pròpia autotransformació. Però el *mindset* no es canvia de manera racional, ni de manera abstracta. El *mindset* va lligat a descobrir les nostres creences que ens fixen límits i es combina amb aconseguir petits passos que ens fan avançar en comportaments i emocions diferents del que hem viscut (que ens han portat al *mindset* actual) i experimentat. Sobretot experimentant, corregint i experimentant de nou. Fins que la nova creença ja forma part de tu.

### **Com es fa això dels «petits passos» que comentes?**

Hi ha moltes maneres de fer-ho i una eina que considero molt útil és llegir el llibre de Kegan *Immunitat al canvi*, en què comparteix els nivells de complexitat del canvi fins a arribar al nivell més alt, el 5 en la seva classificació, que és ser capaç d'autotransformar-se.

## Una lectura molt recomanable per al desenvolupament personal però també professional.

Fins ara no es donava tanta importància a aquest canvi de *mindset*, que barreja emoció, comportaments, racionalitat i complexitat, però, cada vegada més, la societat i les empreses busquen aquesta capacitat i habilitat en els seus líders. I és lògic, perquè no sabem com evolucionarà el món. Com hem comentat abans, només veiem aproximacions. Per tant, és l'única manera que tenim per adaptar-nos contínuament.

## Quin consell donaries a un matemàtic que vulgui entrar al món empresarial? Com podria treballar aquest autoconeixement i autotransformació més enllà de la lectura de Kegan?

Hi ha tallers molt potents per aconseguir això i que oferim a Musarion. Però sobretot es tracta

d'aconseguir ser conscient de les barreres que provenen d'algunes de les nostres experiències o creences i que ens limiten. El primer pas és conscienciar-nos que les tenim, i sobre aquesta base hi treballem i traslledem els canvis de comportament al dia a dia, tant de les persones com a individus, com en l'àmbit d'equips i a les empreses.

## És important que ens deixis les teves dades de contacte, segur que les necessitarem!

Per a qualsevol cosa que necessiteu, podeu contactar-me per LinkedIn, o directament a [llopisj@gmail.com](mailto:llopisj@gmail.com). Serà un plaer.

## Moltes gràcies de nou, Jimena, per compartir el teu temps, la teva experiència i els teus coneixements amb tots nosaltres.

Gràcies a vosaltres!

## Bits

### El laboratori a classe

Martí Prats Soler  
UAB

Aquest darrer estiu ha tornat a aflorar el debat sobre l'ús de tecnologia a l'aula. I és que el passat juny el Parlament francès va aprovar la prohibició de l'ús de telèfons mòbils en escoles i instituts, de manera que des del setembre els alumnes menors de quinze anys no poden usar aquesta tecnologia a classe.

A principis de curs la ministra Celaá es va mostrar disposada a estudiar la iniciativa com a eina per lluitar contra l'addicció a les noves tecnologies també a Espanya. El conseller Bargalló es va posicionar contra la prohibició de mòbils a l'aula i va recordar que són els centres educatius els que han de decidir quin paper tenen les tecnologies en les activitats que s'hi desenvolupen.

En aquesta secció no entrarem a valorar les consideracions pedagògiques, polítiques i de salut, però sembla adequat que dediquem

alguns números d'aquesta a descriure algunes eines que poden ser útils per al professorat de matemàtiques per saber a què renunciem en cas de prohibició. Vull agrair especialment la col·laboració de David Pinyol de l'Institut Obert de Catalunya i de Raül Fernández de l'Institut Vidreres per les seves aportacions, i animar tots els lectors de la revista a fer-nos arribar els seus suggeriments a [mprats@mat.uab.cat](mailto:mprats@mat.uab.cat).

### Phyphox

Els rellotges de polsera s'han anat fent fonent els darrers anys. Ja fa dies que alguns de nosaltres, per esbrinar l'hora quan l'aula no té un rellotge de paret (que haurien de ser obligatoris per decret), fiquem furtivament la mà a la butxaca, traiem l'aparell i el deixem

sobre la taula amb la pantalla mirant amunt, pitgem el botonet per veure l'hora i el girem tot seguit per si de cas ens comença a alertar que tenim hora al dentista o que hem d'actualitzar l'antivirus.

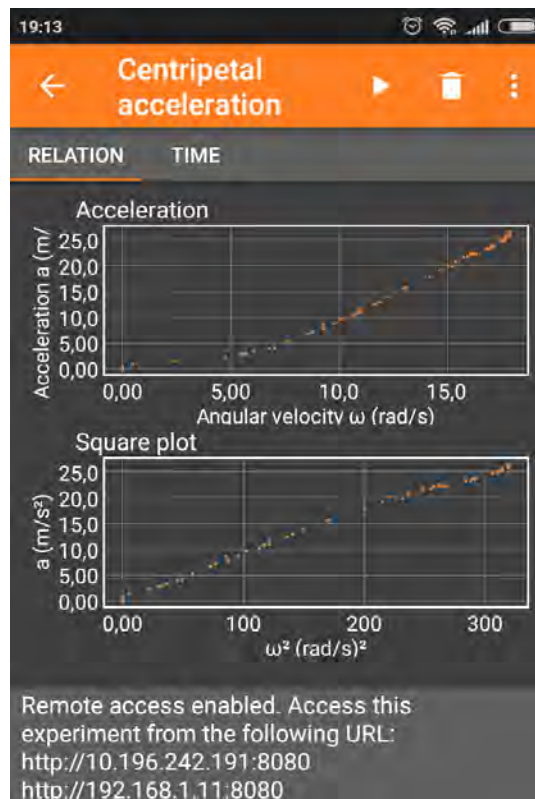
Els telèfons actuals tenen una sèrie de sensors que ens permeten fer molt més que controlar el temps. Solen estar equipats amb acceleròmetre, giroscopi, sensor de llum, GPS, magnetòmetre i baròmetre, així com una o dues càmeres i un micròfon per obtenir tota mena de dades que permeten que el telèfon es guanyi el (discutible) qualificatiu d'intelligent. Amb tota aquesta informació no podem tenir un laboratori portàtil?

Aquesta és la idea d'un grup d'investigadors en física experimental de la Universitat d'Aachen, Alemanya, que van desenvolupar l'aplicació Phyphox<sup>1</sup> (PHYsical PHOne eXperiments) per tenir una aplicació des d'on controlar tots aquests sensors. El resultat és una aplicació molt fàcil de fer servir, amb una orientació didàctica ben marcada.

La pantalla principal ens mostra una llista d'utilitats possibles, començant per la lectura de les dades «crues» dels sensors, continuant per una llista d'experiments predissenyats agrupats en acústica, mecànica, ... on es combinen les diferents dades del telèfon, i acabant per una sèrie de temporitzadors activats a través de diferents sensors i altres eines. La majoria dels experiments estan acompanyats d'un vídeo explicatiu.

Per posar un exemple, l'experiment «acceleració centrípeta» ens mostra dos gràfics, un conté la relació entre velocitat angular i acceleració, i l'altre la relació entre el quadrat de la velocitat angular i l'acceleració. La proposta és col·locar el nostre aparell dins una centrifugadora d'enciam, de manera que quedi ben immòbil. Quan fem girar la maneta l'aparell registrarà dades de l'acceleròmetre i el giroscopi i anirà posant punts als gràfics. Com que la relació entre les magnituds estudiades, un cop fixat el radi de rotació, és quadràtica, en un cas els punts s'aniran distribuint ben a prop d'una paràbola, i en l'altre cas al llarg d'una recta. Les dades es poden exportar després a un full de càlcul molt fàcilment (en CSV).

<sup>1</sup><https://phyphox.org>



I, és clar, pensareu que si el mòbil és dins d'una centrifugadora no podem llegir res fins que no surti de dins i amb el tragí començarà a aparèixer soroll al gràfic. Però hi ha dues eines genials. Primer, es pot temporitzar la lectura. I encara millor, amb un parell de clics podem connectar un ordinador (o qualsevol aparell que tingui explorador d'internet) al mòbil per engegar, apagar i visualitzar les dades al moment. No és fabulós? L'única condició per fer la connexió és que els dos aparells estiguin a la mateixa xarxa.

Tanmateix, la cosa encara es posa més interessant en crear experiments nous. L'editor que incorpora l'aplicació no permet fer gaire res més que llegir les dades. No obstant això cada experiment està vinculat amb un arxiu XML que qui entengui el llenguatge no tardarà a poder modificar per fer petites variacions dels originals. A més al web de Phyphox podem trobar un editor en línia que permet dissenyar experiments des de zero i fer autèntiques meravelles.

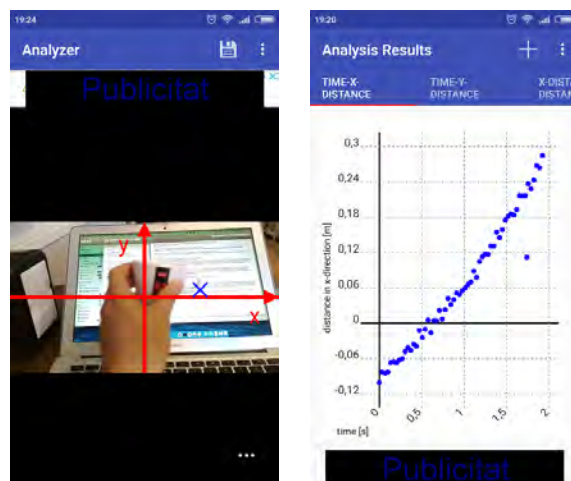
## VidAnalysis

El Phyphox, de moment, no interactua amb la càmera del mòbil. En canvi, hi ha una aplicació



molt senzilla que ens permet fer estudis de cinemàtica bàsica amb el telèfon. Amb VidAnalysis<sup>2</sup> podem determinar la trajectòria d'un objecte en una gravació feta amb la càmera. Immediatament, podem veure una sèrie de gràfics que relacionen les dades obtingudes (temps, abscissa, ordenada i variacions d'ambdues coordenades). Aquestes es poden exportar a un full de càlcul mitjançant un fitxer CSV.

Aquesta aplicació té com a inconvenient que cal seleccionar el punt a seguir fotograma a fotograma, tasca que és poc precisa quan usem una pantalla de mòbil, a banda de ser una mica feixuga, però el resultat val la pena.



## Cultura

### La combinatòria en l'art del segle XX

Lali Barrière

Universitat Politècnica de Catalunya

Com es poden utilitzar les estructures combinatòries en una obra d'art? Hi ha artistes que treballen o pensen de manera combinatòria? Si és així, quines són les obres fruit d'aquesta manera de treballar? Quines són les similituds i diferències entre obres d'art produïdes utilitzant combinatòria?

Potser pel fet que la combinatòria és una àrea de les matemàtiques de caràcter molt transversal, trobem que és present en l'art des de l'antiguitat. Tanmateix, el pensament combinatori no s'hi troba expressat i explicitat fins molt més endavant. De fet, la combinatòria no es va establir pròpiament com a branca de les matemàtiques fins ben tard, en el marc dels canvis que es van donar en la ciència a principis del segle passat, i en paral·lel amb els desenvolupaments tecnològics que van desembocar, entre d'altres, en l'aparició dels ordinadors. Aquests canvis no es produïen de manera aïllada. També els artistes buscaven noves formes d'expressió i en molts casos es basaven en idees matemàtiques per proposar nous camins creatius.

<sup>2</sup><https://vidanalysis.com/>

I és en aquest moment, amb l'abstracció i les avantguardes, primer, i amb l'art conceptual, més tard, que els artistes van començar a servir-se de la combinatòria com a eina i per conceptualitzar el seu treball.

Donem aquí una resposta, que només pot ser parcial, a les preguntes de l'inici, fent un recorregut per les obres d'alguns artistes. Artistes que adopten un enfocament combinatori en la seva obra, i obres en les quals les estructures combinatòries són part del procés creatiu en si mateix, més que no pas una simple eina per arribar a un determinat resultat artístic. En aquestes obres, tant si la intenció de l'artista és fer visible l'estructura combinatòria com si no, aquesta és, de manera expressa i conscient, feta part de l'obra, no només un mitjà cap a un fi.

### Música

La música ha estat relacionada amb les matemàtiques des dels seus orígens. En tots els models matemàtics que han inspirat o fonamentat teories musicals, la combinatòria hi

ha tingut un paper perquè gairebé tots els sistemes musicals són discrets. Des dels sistemes musicals de l'edat mitjana fins a l'actualitat, la combinatòria subjau en les escales i els acords, en les tècniques de composició, i hi ha abundant literatura sobre aquest tema, com per exemple els llibres de Knoblock [11] i Nolan [17]. Benson [2] dedica un capítol a l'estudi de la simetria en la música, que inclou una secció sobre *change ringing* i el grup de permutacions, i una altra sobre l'ús del teorema d'enumeració de Pólya en la resolució de problemes de comptatge relacionats amb la música. Read [20] presenta alguns problemes combinatoris musicals, centrats en Messiaen i Stockhausen. Sethares [23] va portar a terme un original estudi sobre el ritme, amb un capítol dedicat als seus aspectes combinatoris. De fet, quan es veu la composició com una metodologia de la decisió, el rang d'opcions que un sistema musical proporciona és, sempre, un problema combinatori (vegeu el capítol 9 del llibre de Loy [14]).

Al segle XX, igual com les convencions de la pintura figurativa van ser radicalment transformades amb l'arribada de l'abstracció, també les formes musicals fonamentals es van veure modificades pel pas de la música tonal a l'atonalitat. Els músics que volien trencar amb la tradició van començar a explorar nous territoris sònics, per als quals es requerien noves metodologies. Aquesta nova manera de pensar va donar lloc a una presència més forta de la combinatòria en les obres musicals.

**La música dodecafònica.** Un d'aquests nous sistemes és la música dodecafònica, també coneguda com a «serialisme», desenvolupada per Arnold Schoenberg [22]. Aquesta metodologia de composició, basada en les permutacions de les 12 notes de l'escala cromàtica, va ser més tard transformada en un sistema encara més organitzat, anomenat «serialisme integral».

La primera fornada de compositors serialistes, la Segona Escola de Viena, va ser un grup de compositors dels inicis del segle XX format per Arnold Schoenberg i els seus deixebles, entre ells Alban Berg i Anton Webern. Amb l'objectiu de destruir l'expectativa de tonalitat, el serialisme treballa amb *12-tone rows*, permutacions sense repetició de

les 12 notes. Schoenberg va establir una sèrie de regles estrictes que ell va anomenar *Method of Composing with Twelve Tones Which are Related Only With One Another* [22]. Resumint:

- Per a una composició es tria una permutació de les 12 notes, que s'anomena *basic set*. Es pot veure com una seqüència de notes i també com una seqüència d'interval·ls, i es pot denotar per una permutació del conjunt  $\{0, 1, \dots, 11\}$ . Les notes es poden usar lliurement en qualsevol octava.
- Les notes s'utilitzen successivament en la composició, a mesura que es van necessitant, de manera que quan la seqüència s'acaba es torna a la primera nota.
- El compositor també pot utilitzar les permutacions obtingudes del *basic set* per a l'aplicació de les operacions següents:
  - **Inversió.** Substituir cada nota pel seu oposat (mòdul 12).
  - **Retrogradació.** Llegir la seqüència en ordre invers.
  - **Retrogració invertida.** Composició de les operacions d'inversió i retrogradació.
  - **Transposició** per  $n$  semitons. Sumar  $n$  a cada nota (mòdul 12).

Després de la Segona Guerra Mundial, una segona fornada de compositors, entre ells Pierre Boulez i Milton Babbitt, inspirats pel tractament sistemàtic de l'altura, el ritme, la dinàmica i l'articulació de les composicions d'Anton Webern, van crear una nova forma de música. El serialisme integral és una metodologia de composició que fa un pas més enllà en les tècniques dodecafòniques. Essencialment consisteix a aplicar la tècnica de les permutacions de 12 notes als altres paràmetres musicals. Per exemple, Olivier Messiaen estableix sèries o modes de 36 altures, 12 articulacions o atacs, i 7 graus d'intensitat en la seva obra *Mode de valeurs et d'intensités*, una peça que no era estrictament dodecafònica però que va inspirar, igual que abans ho havia fet Anton Webern, el segon grup de compositors.

**Tom Johnson.** Un altre compositor que utilitza la combinatòria en la seva obra és Tom Johnson [6]. De fet, tota la seva obra està basada en idees matemàtiques, i és de llarg el compositor que ha fet i fa un ús de la combinatòria més clar i més directe, amb un punt de vista totalment diferent del dels compositors serialistes. Johnson utilitza la combinatòria per definir l'estructura de les seves composicions, utilitzant fins i tot configuracions ben complexes, com dissenys combinatoris.

Tanmateix, com ell mateix admet, un dels seus objectius és fer la seva música accessible, comprensible, i el seu procés i la seva estructura matemàtica (combinatòria) fàcil de percebre. Ha estat sovint anomenat «l'home que compta».

Johnson dibuixa grafs i diagrames per representar i entendre les estructures que després pot usar o no en les seves composicions. Ha col·laborat amb el matemàtic Franck Jedrzejewski per explicar el contingut combinatori tant de la seva música com dels seus dibuixos al llibre *Looking at Numbers* [10].

Una selecció de les tècniques utilitzades en les obres combinatoris de Tom Johnson, des del 2000, inclou:

**Particions d'enters.** Utilitzades per construir acords amb la mateixa altura mitjana. A l'obra *Trio*, els tres instruments toquen acords que sumen 72 mentre que a *Hexagons* es combinen dues sumes, 30 i 31.

**Subconjunts.** A *Mocking*, tres percussionistes toquen ritmes construïts triant 4 nombres diferents entre 1 i 8. Johnson els representa com a sumes des de  $10 = 1 + 2 + 3 + 4$  fins a  $26 = 5 + 6 + 7 + 8$ , en un graf que connecta els subconjunts amb elements comuns.

**Disseny combinatori.** Treballant amb *block designs*, Johnson identifica els elements dels blocs amb paràmetres musicals, com altures i ritmes, i utilitza l'estructura d'aquests blocs per generar un fil a través del material musical, i enllaça els blocs pels seus elements comuns.

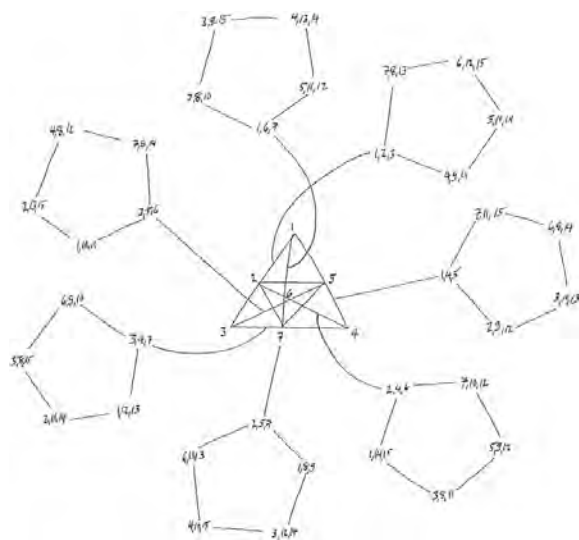
A *Vermont Rhythms*, utilitza  $42 \times 11$  ritmes basats en el disseny (11, 6, 3), mentre que *Block Design for Piano* està construïda a partir del disseny 4-(12, 6, 10) definit per 30 blocs base i

un automorfisme del grup de permutacions de 12 elements. La partitura *Kirkman's Ladies* es va inspirar en el conegut problema proposat pel Reverend Kirkman el 1847 a *The Lady's and Gentleman's Diary*:

«*Fifteen young ladies in a school walk out three abreast for seven days in succession: it is required to arrange them daily so that no two shall walk twice abreast.*»

La solució d'aquest problema involucra sistemes de triples de Kirkman, un cas especial de disseny combinatori. En la partitura, Johnson usa un disseny (15, 3, 1) amb  $13 \times 35$  blocs. Com ell mateix explica:

«*In my score, entitled Kirkman's Ladies, the 15 ladies become a scale of 15 notes, and the daily walks of five rows, three ladies in each row, become phrases of five chords with three notes in each chord. Each lady/note occurs once in each sequence of five chords, each pair of ladies walks together once a week, and by the end of the 13 weeks/sections, all 455 possible trios of women, all 455 possible combinations of three notes, have passed by.*» (Vegeu [10], pàg. 39.)



Dibuix de Tom Johnson usat a *Kirkman's Ladies*.  
(Amb permís de l'autor.)

## La combinatòria en la literatura

En la literatura cal distingir la poesia de la prosa, perquè la mètrica i els patrons rítmics presents en la poesia són, d'alguna manera,

estructures combinatòries. A més les permutacions s'han fet servir en poesia almenys des del segle XII. La sextina, inventada pel trobador provençal Arnaut Daniel, és una estructura molt coneguda que es basa en les permutacions de sis elements. Una altra forma poètica famosa és la poesia proteana, en la qual s'utilitzen permutacions de paraules, de la qual l'exemple més antic que es conserva data del 1561 (vegeu Higgins [9]).

Al segle XX, trobem permutacions en la tècnica del *cut-up* dels dadaistes, i en les obres del pioner de la poesia digital Brion Gysin, entre d'altres (vegeu Funkhouser [7]). En prosa, les tècniques narratives innovadores de l'escriptor argentí Julio Cortázar s'escapen de la linealitat temporal. La seva obra més famosa és la novel·la *Rayuela*, en la qual el lector pot decidir en quin ordre llegir els capítols. En la mateixa línia, trobem la novel·la *Composition no. 1*, de l'escriptor francès experimental Marc Saporta, sense un ordre establert per a la lectura de les pàgines.

**Oulipo.** L'«Ouvrier de Littérature Potentielle», Oulipo, va ser un grup d'escriptors i matemàtics fundat el 1960 per François Le Lionnais i Raymond Queneau (ambdós matemàtics) com una reacció contra la literatura tradicional, en particular la romàntica, i contra el surrealisme. El grup treballava fonamentalment amb dos objectius. Primer, generar el que ells anomenaven una «potencialitat», proporcionar metodologies per crear obres potencials, fins i tot si no s'acabaven realitzant, crear «el llibre de totes les històries». I segon, escriure amb «restriccions» o regles per elaborar noves formes i estructures que servissin com a suport a noves obres literàries. Aquesta visió tecnicista de la literatura, que vol utilitzar el llenguatge de manera més abstracta i entendre'l com una mena de joc de construcció on els signes que es poden muntar seguint regles, combinacions o algorismes, és el que dona a les obres d'Oulipo el seu caràcter combinatori. Claude Berge, membre d'Oulipo i, com a matemàtic, reconegut expert en combinatòria i teoria de grafs, explica a [3] com la literatura d'Oulipo està relacionada amb la combinatòria i proposa diverses maneres de representar l'estructura combinatòria d'algunes obres dels Oulipo utilitzant grafs.

Els autors següents van ser membres destacats d'Oulipo:

**Raymond Queneau.** La seva obra *Cent mille milliards de poèmes* (1961) és, de fet, un conjunt de 10 sonets. Com que cada sonet segueix la mateixa rima, cada vers d'un dels sonets pot ser reemplaçat pel vers de la mateixa línia de qualsevol dels altres sonets, sense trencar cap de les regles formals. D'aquesta manera, l'autor va més enllà de la utilització de la permutació, amb el propòsit de tenir el conjunt sencer de poemes tot junt, cosa que mostra la potencialitat de l'obra.

**George Perec.** *La vie, mode d'emploi* (1978) és una descripció extremadament detallada de les habitacions d'una casa i de tot el que allí es troba, inclosos els ocupants, en un cert instant de temps. Al llarg de la novel·la s'estableixen nombroses connexions entre les estances, els objectes, els personatges, que creen una xarxa, una novel·la de novel·les. L'escriptura de *La vie, mode d'emploi* involucra diversos esquemes combinatoris. Per exemple, les habitacions es corresponen amb els elements d'un quadrat llatí ortogonal d'ordre 10, que consisteix en dos quadrats llatins sobre dos conjunts  $S$  i  $T$  de  $n$  elements (en aquest cas 10) definits sobre el mateix quadrat  $n \times n$ , de manera que cada parell  $(s, t)$  del producte cartesià  $S \times T$  apareix exactament una vegada. A més, en la primera part de la novel·la, els moviments en la casa, és a dir, el quadrat  $10 \times 10$ , segueixen un camí hamiltonià segons els moviments d'un cavall en un tauler d'escacs d'aquestes dimensions [18].

**Italo Calvino.** Calvino, un escriptor italià que es va unir al grup Oulipo en la darrera etapa de la seva carrera, va escriure novel·les que contenen potencialment moltes històries diferents, les quals han de ser construïdes pel lector. L'obra de Calvino en aquesta etapa ha estat anomenada «literatura combinatòria» [5]. Com a precursor de l'hipertext, anomenava les seves novel·les «hipernovel·les». Els llibres més coneguts que va escriure en aquest període són *Le città invisibili* (1972), una sèrie de relats que descriu ciutats fantàstiques, *Il castello dei destini incrociati* (1973), en el qual va utilitzar combinacions de cartes del



tarot, i *Se una notte d'inverno un viaggiatore* (1979), una col·lecció d'històries entrecruades, algunes de les quals interrompudes per accidents com un error tipogràfic (expressament comès per l'autor). En els tres llibres citats, el relat és concebut com una xarxa de relats.

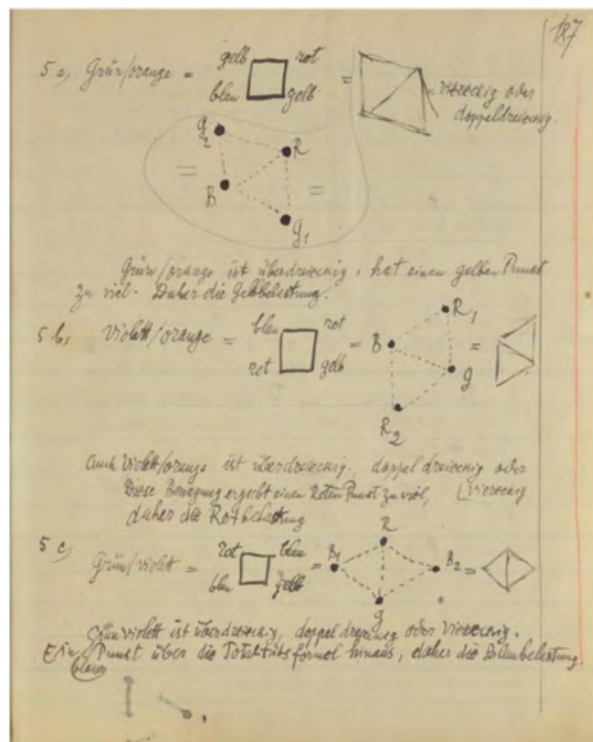
## La combinatòria en l'art visual

La interacció entre art i geometria ha existit des de l'antiguitat. En les primeres dècades del segle passat, començant amb els experiments del cubisme i l'expressionisme, l'art visual va passar del figuratiu a l'abstracte. Van sorgir un gran nombre de moviments, alguns dels quals inspirats per les matemàtiques i, en el cas del constructivisme, l'abstracció geomètrica i el minimalisme, per les formes geomètriques més simples. Les composicions no representacionals tractaven de produir formes geomètriques on les mides i i altres característiques de cada una d'aquestes formes, les relacions entre elles, els colors usats en tota l'obra, van esdevenir els motius definidors de l'abstracció. Aquestes obres d'art eren concebudes com combinacions de formes i colors. A [13], Lorenzi i Francaviglia fan una descripció molt detallada de les relacions entre geometria i art durant el segle XX.

En alguns casos, la geometria és la part visual d'una obra que es basa en estructures i metodologies combinatòries. Malgrat el fort caràcter geomètric de les obres dels artistes de les avantguardes, el pensament combinatori ja comença a ser present en els artistes. Per exemple, Paul Klee, Vassily Kandinsky, i Josef Albers, que van ser mestres a la coneguda escola Bauhaus en el període d'entre guerres, van ser influenciats pels treballs de Wilhelm Ostwald, un químic guardonat amb el premi Nobel l'any 1909, que va utilitzar la combinatòria com una forma creativa i interdisciplinària de pensar, en àrees com l'organització del coneixement i en la seva teoria dels colors i les formes (vegeu l'estudi de Hapke [8]). Les notes de classe de Paul Klee mostren com utilitzava grafs per representar les relacions entre colors.

A partir d'aquell moment, amb l'abstracció geomètrica alguns artistes comencen a utilitzar idees combinatòries. L'interès per les

matemàtiques en general es tradueix també per un interès per la combinatòria en particular. Cap a mitjan segle XX la combinatòria es fa més present en l'art visual. Els casos més paradigmàtics són els artistes conceptuals que treballen de manera geomètrica i els pioners de l'art digital, els primers artistes que van decidir utilitzar l'ordinador per realitzar les seves obres.



Notes de classe de Paul Klee. (Online-Data Base, Zentrum Paul Klee, domini públic.)

Els tres artistes següents, Sol LeWitt, Vera Molnar i Manfred Mohr, són els més representatius d'aquesta època, i en el seu art podem observar tres maneres diferents d'aproximar-se a la combinatòria.



Sol LeWitt. *Incomplete cubes*, 1974. (Per cortesia d'Art Gallery of New South Wales.)

**Sol LeWitt.** Artista conceptual, LeWitt és conegut per la seva sèrie d'obres sobre el cub i pels seus murals. La primera obra sobre el

cub, *Serial Project #1* (1966), mostra les 36 configuracions possibles que resulten de dos cubs disposats un dins de l'altre, cada un amb dos paràmetres, «superfície» (obert/tancat) i «altura» (baix/mitjà/alt). En el text que acompanya l'obra [12], LeWitt descriu les regles combinatòries que defineixen la defineixen. *Variations of incomplete cubes* (1974) és una altra obra combinatòria: la construcció de totes les figures que es poden obtenir eliminant arestes d'un cub.

Pel que fa als murals, molts d'ells segueixen regles combinatòries, sovint explicitades en el títol, com per exemple, *Wall Drawing #118, Fifty randomly placed points all connected by straight lines* (1971), *Wall Drawing #450, A wall is divided vertically into four equal parts. All one-, two-, three- and four-part combinations of four colors* (1985) i *Wall Drawing #493, The wall is divided vertically into three equal parts. All one-, two-, and three-part combinations of three colors* (1986).



Sol LeWitt. *Wall drawing #413*, 1984. (Per cortesia de MASS MoCA.)

L'interès de Sol LeWitt a fer visible a l'observador l'estructura combinatòria de l'obra contrasta amb la idea de Donald Judd, un artista que utilitzava seqüències numèriques en el seu art, i que va influenciar LeWitt en les seves obres primerenques. Judd pensava que les matemàtiques de la seva obra havien d'estar d'alguna manera amagades o, si més no, deixar-les menys clares a l'observador (Rottman [21]).

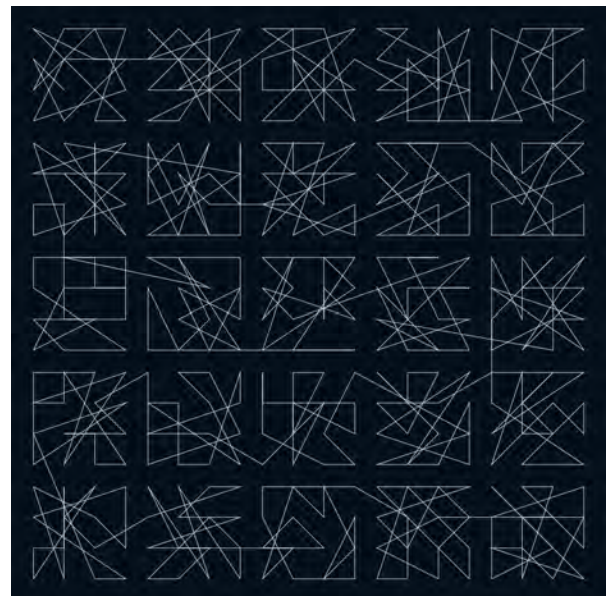
**Vera Molnar.** Vera Molnar [24], que va rebre una formació en pintura clàssica, treballava amb una gran varietat de tècniques com *collage*, guaix, llapis. Tot i això, la seva fama prové del fet de ser una pionera de l'art digital. Utilitzava l'ordinador com una eina per desenvolupar un llenguatge sistemàtic. «Its immense combinatorial capacity facilitates the systematic investi-

gation of the infinite field of possibilities», va dir [19].



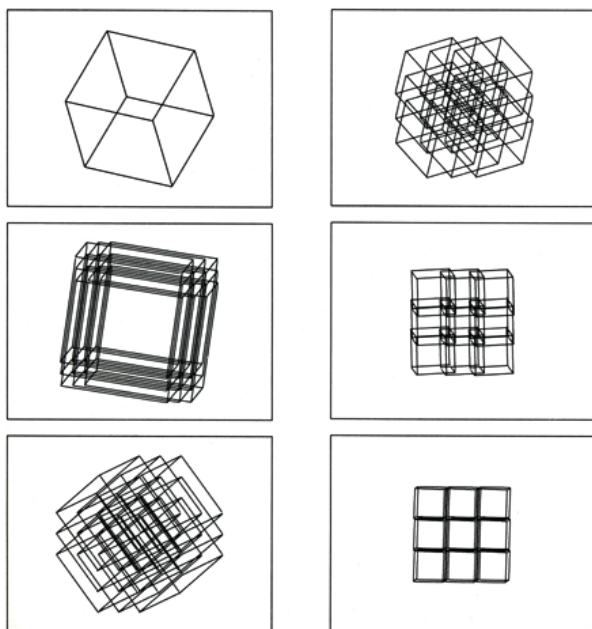
Vera Molnar. *Structure de Quadrilatères*, 1987. (Per cortesia de Spalter Digital Art Collection.)

En la seva obra, influenciada per les idees de Max Bill [4], que proposava ajudar-se de les matemàtiques per renovar el llenguatge artístic, Molnar utilitza figures geomètriques com quadrats, cercles i línies, amb èmfasi en la repetició. A més de l'ús de figures geomètriques simples (tal com ella diu, «*I love squares*»), les seves obres es basen en una investigació de les possibilitats expressives del contrast entre ordre i desordre, que assoleix combinant irregularitats o aleatorietat amb una estructura, donada per la combinatòria.



Vera Molnar. *Hommage a Dürer*, 1989-2004. (Relectura per L.B. Projecte Recode.)

Un tema recurrent en l'obra de Molnar és la representació i la descomposició de la malla quadrada  $3 \times 3$ , i de dimensions més grans, una estructura combinatòria que descompon i desconstrueix de maneres variades en un gran nombre d'obres, a vegades fins i tot utilitzant polièdres. Una d'aquestes obres és *Hommage à Dürer*, una sèrie iniciada el 1948, en la qual va treballar al llarg de més de 50 anys. Una línia que segueix una permutació dels quadrats d'una malla  $4 \times 4$  representa un quadrat màgic, que fa referència al quadrat màgic de la pintura *Melencolia I*, d'Albrecht Dürer. Amb la mateixa idea, genera permutacions diferents i les col·loca en els quadrats d'una malla  $5 \times 5$ ,  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$ ...

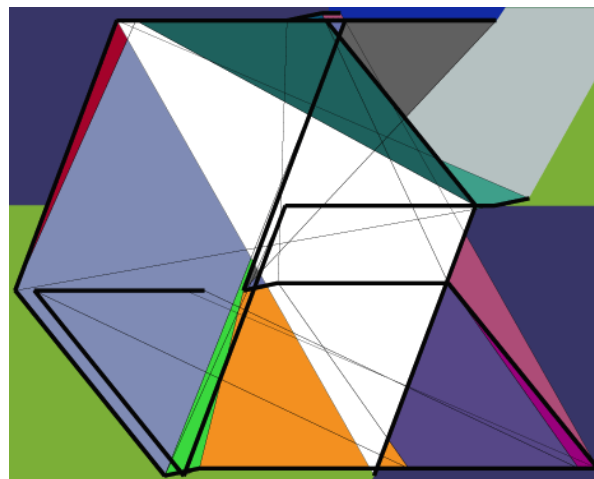


Manfred Mohr. *cubic limit*, 1972–1975. (Amb permís de l'autor.)

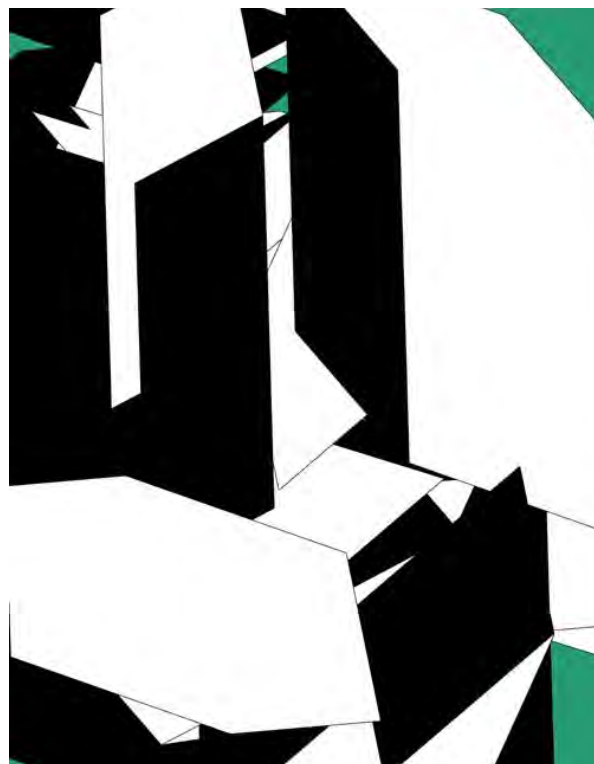
**Manfred Mohr.** Manfred Mohr [15], pintor expressionista abstracte i músic de jazz, es va sentir atret per la geometria algorítmica generada per ordinador després de descobrir l'estètica de la informació de Max Bense [1] a l'inici de la dècada de 1960. El 1969 va programar els seus primers dibuixos per ordinador. Des de llavors ha seguit desenvolupant i escrivint algoritmes per a les seves idees visuals i produeix el seu art exclusivament amb ordinador. Com ell explica a [16]:

«The first step in that direction was an extended analysis of my own paintings and

*drawings from the last ten years. It resulted in a surprisingly large amount of regularities, determined of course by my particular aesthetical sense, through which I was able to establish a number of basic elements that amounted to a rudimentary syntax. After representing these basic constructions through a mathematical formalism, and setting them up in an abstract combinatorial framework, I was in a position to realize all possible representations of my algorithms.»*



Manfred Mohr. *space.color*, 2000. (Amb permís de l'autor.)



Manfred Mohr. *Subsets*, 2003–2005. (Amb permís de l'autor.)



El 1973, Mohr va iniciar la seva obra sobre el cub, que ha continuat fins a l'actualitat amb obres de complexitat creixent, sobre hipercubs multidimensionals i les seves propietats combinatòries. Per exemple, la sèrie *space.color* consisteix a seleccionar recorreguts sobre camins que passen per les diagonals de l'hipercub de dimensió 6, per després acolorir alguns dels plans que es poden formar.

A *Subsets*, l'algoritme selecciona un subconjunt de cubs, construïts a partir de l'hipercub de dimensió 11, i després decideix quines cares han de ser blanques i quines negres.

### Una resposta inacabada

Aquest ha estat un petit recorregut per les obres combinatòries dels artistes visuals, escriptors i músics que personalment considero més interessants i representatius. La tria, però, no és fruit del caprici. S'ajusta a un propòsit: el de mostrar les variades formes en les quals la combinatòria es manifesta a través de les disciplines artístiques. Però hi ha altres artistes que no hem vist aquí per manca d'espai. Així com hi ha altres disciplines, com són el cinema, la fotografia, la dansa. I tot el món de les arts electròniques.

### Referències

- [1] M. Bense. *Aesthetica II - Aesthetische Information*. Agis-Verlag, 1956.
- [2] D. Benson. *Music: A Mathematical Offering*. Cambridge University Press, 2006.
- [3] C. Berge, «Para un análisis potencial de la literatura combinatoria». A: H. Salceda, ed. *OULIPO. Atlas de Literatura Potencial, 1: Ideas Potentes*. Pepitas de Calabaza, Logroño, Spain, 2016.
- [4] M. Bill, «The Mathematical Approach in Contemporary Art». A: K. Stiles and P. Selz, eds., *Theories and Documents of Contemporary Art. A Sourcebook of Artists' Writings*, University of California Press, 1996, pp. 74–77.
- [5] I. Calvino, «Appunti sulla narrativa come processo combinatorio». *Nuova Corrente*, 46-47, 1968.
- [6] Editions 75 – works by Tom Johnson. <http://www.editions75.com/>.
- [7] C. T. Funkhouser. *Prehistoric Digital Poetry. An Archaeology of Forms, 1959-1995*. The University of Alabama Press, 2007.
- [8] T. Hapke, «Wilhelm Ostwald's Combinatorics as a Link Between Information and Form». *Library Trends*, 61(2): 286–303, 2012.
- [9] D. Higgins. *Pattern Poetry: Guide to an Unknown Literature*. SUNY Press, 1987.
- [10] T. Johnson i F. Jedrzejewski. *Looking at Numbers*. Springer, 2014.
- [11] E. Knoblock, «The Sounding Algebra: Relations Between Combinatorics and Music from Mersenne to Euler». A: G. Assayag, H.G. Feichtinger, J.F. Rodrigues, eds., *Music and Mathematics. A Diderot Mathematical Forum*, Springer, 2002.
- [12] S. LeWitt, «Serial Project #1», *Aspen*, 5-6, 1967.
- [13] M. G. Lorenzi i M. Francaviglia, «The Role of Mathematics in Contemporary Art at the Turn of the Millenium». *Aplimat - Journal of Applied Mathematics*, 4(4): 215–238, 2011.
- [14] G. Loy. *Musimathics. The mathematical Foundations of Music. Vol.1*. The MIT Press, 2006.
- [15] Manfred Mohr. <http://www.emohr.com/>.
- [16] M. Mohr. *Computer graphics. Une esthétique programmée*. Weberdruck Pforzheim, 1971.
- [17] C. Nolan, «On Musical Space and Combinatorics: Historical and Conceptual Perspectives in Music Theory». A: R. Sarhangi ed., *Proceedings of Bridges 2000: Mathematics, Music, Art, Architecture, Education, Culture*, pp. 201–208, Winfield, Kansas, 2000.
- [18] G. Perec, «Quatre figures pour La Vie mode d'emploi». In: *Oulipo Atlas de littérature potentielle*, Gallimard, 1981, pp. 387-395.



- [19] J.-M. Place, «Vera Molnar, Regard sur mes images». *Revue d'esthétique*, 7, 1984.
- [20] R.C. Read, «Combinatorial problems in the theory of music». *Discrete Mathematics*, 167-168: 543–551, 1997.
- [21] M. Rottman, «Donald Judd's Arithmetics and Sol LeWitt's Combinatorics. On the Relationship Between Visual and Mathematical in New York Art Around 1960». In M. Emmer, ed., *Imagine Math 3. Between Culture and Mathematics*, Springer, 2015.
- [22] A. Schoenberg, «Composition with Twelve Tones». A: *Style and Idea. Selected Writings of Arnold Schoenberg*, Faber & Faber, 1975, pp. 102–143.
- [23] W.A. Sethares. *Rhythm and Transforms*. Springer, 2007.
- [24] Vera Molnar. <http://www.veramolnar.com/>.

## Heisenberg i Bohr a «Copenhaguen»

Pep Bujosa

Associació Catalana de GeoGebra

Com recordareu, en aquesta secció del número anterior, vaig parlar de l'obra de teatre que el grup l'Enjòlit va representar a Barcelona sobre el teorema de Fermat. En el col·loqui, al final de la representació a la qual vam assistir un bon grapat de persones vinculades directament amb les matemàtiques, el professor Sebastià Xambó va preguntar als actors si havien vist l'obra de teatre *Copenhaguen*. Ells van respondre que no, però que n'havien sentit a parlar. A quina obra es referia el professor Xambó?

Avui us parlaré d'aquesta obra, que vam poder veure al Teatre Nacional de Catalunya entre el 28 d'abril i el 6 de juny de 2011.



### L'autor

Michael Frayn n'és l'autor. Va néixer a Londres l'any 1933 i té una àmplia producció teatral, farcida de diversos premis. També ha estat

traductor i adaptador a l'anglès de Tolstoi i, sobretot, de Txékhov. En la temporada 1985–86, es va representar al Romea una adaptació seva de *Mel salvatge*, de Txékhov, dirigida per Pere Planella i, al Condal, la seva *Pel davant i pel darrera*, que va ser un gran èxit de públic i crítica.

### «Copenhaguen»

Va estrenar *Copenhaguen* l'any 1998 al National Theatre de Londres, on es van fer més de 300 representacions. L'abril del 2000 es va estrenar a Broadway i va guanyar els premis Tony a la millor obra, millor actriu i millor direcció. Dos anys més tard, va ser adaptada al cinema per Howard Davies.

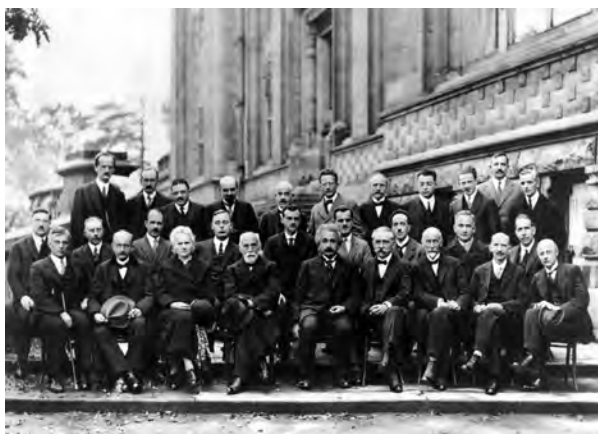
Després de tot aquest èxitós recorregut, arriba a Barcelona l'any 2011. L'abril s'estrena al Teatre Nacional de Catalunya sota la direcció Ramon Simó i amb l'actuació memorable, de Rosa Renom, Lluís Marco i Pere Arquillué.

### L'argument

L'obra tracta de la famosa reunió que van tenir els físics Niels Bohr, danès, i Werner Heisenberg, alemany, el 1941 a la ciutat de Copenhaguen, en qualitat de mestre i d'antic deixeble, i enemics per la situació dels seus dos països durant la Segona Guerra Mundial. En aquell moment, Alemanya ja havia ocupat Dinamarca. En realitat, del contingut

d'aquella reunió n'ha transcendit molt poc. Tant Bohr com Heisenberg no van donar explicacions del que van parlar en la seva breu trobada. Aquí l'autor aprofita aquest misteri per suposar com podia haver transcorregut la trobada.

Relata que el presumpte tema principal de la conversa va ser el paper de física teòrica i, per tant, d'alguna manera, de les matemàtiques, en el desenvolupament de l'energia nuclear, amb el perill que representava que els alemanys poguessin fabricar la bomba atòmica abans que els aliats.



Formalment, situa els dos físics i Margarida, dona de Bohr, com a tres esperits que es retroben després de la mort. D'aquesta manera poden comentar tot el que va passar quan eren vius, ara que ja són lliures de qualsevol interpretació de les seves actuacions.

Recorden quan es van conèixer:

MARGARIDA: ... *El primer que van fer quan es van conèixer és anar a caminar. Després d'aquella conferència a Göttingen, Niels, immediatament, va anar a cercar a aquell jove atrevit que havia qüestionat les seves matemàtiques i se'l va emportar a caminar pel camp. Caminar, parlar, conèixer-lo... Molta de la física del segle XX la van fer a l'aire lliure...*

Recorden el seu treball conjunt:

HEISENBERG *Ah! Quins anys aquells! Aquells tres anys! I que curts que se'm van fer!*

BOHR *Del 1924 al 1927.*

HEISENBERG *Des que vaig arribar a Copenhaguen a treballar amb tu.*

BOHR *Fins que te'n vas anar a fer-te càrrec de la teva càtedra de Leipzig.*

HEISENBERG *Tres anys d'una primavera aspra, vigoritzant, típica del nord d'Europa.*

BOHR *Al final de la qual teníem la mecànica quàntica, el principi d'incertesa...*

HEISENBERG *Teníem la teoria de la complementarietat...*

BOHR *Teníem la totalitat de les interpretacions del grup de Copenhaguen.*

HEISENBERG *Novament Europa amb tota la seva glòria. Un nou renaixement, amb Alemanya en el lloc que es mereixia, en el centre de tot. I qui va obrir el camí?*

MARGARIDA *Vosaltres dos.*

## Heisenberg, el calculador

Heisenberg (1901–1926) volia doctorar-se inicialment en matemàtiques, en concret en teoria de nombres. De mica en mica, es comença a interessar per la física teòrica i acaba fent el doctorat sobre la turbulència dels fluids. En el seu treball demostra el gran talent matemàtic que té i, en canvi, és menys hàbil en l'experimentació de laboratori.



Aquesta destresa matemàtica serà fonamental en tota la seva trajectòria científica. Per a ell, les matemàtiques són fonamentals per a qualsevol avenç en la nova física que estaven desenvolupant. Tant és així, que, com ha dit el personatge de MARGARIDA, quan encara era molt jove va gosar corregir matemàticament el ja famós Neils Bohr. El 1925 proposa la seva mecànica matricial. Una eina matemàtica que serà fonamental per arribar al seu principi d'incertesa, bàsic per a tot el desenvolupament de la mecànica quàntica.

HEISENBERG ... *Recordo la nit en què les matemàtiques van començar a harmonitzar amb el principi d'incertesa. Sí, va ser terriblement esgotador. Cap a les tres de la matinada aconseguí resoldre el problema. Semblava com si mirés a través de la superfície del fenomen atòmic i veiés un bell món interior. Un món d'estructures purament matemàtiques. I sí, era molt feliç!*

### **Però, de què van parlar el 1941?**

Durant l'obra, es van fer diferents aproximacions del contingut específic de la seva conversa. Com que no es coneix exactament què es van dir, l'autor fa una proposta:

BOHR ... *I vam sortir. A fora, sota els arbres de la tardor. A través dels carrers foscos per por dels possibles bombardejos... Amb total indiferència ell comença a fer-me la pregunta que s'havia preparat.*

HEISENBERG *¿Té algú, com a físic, moralment el dret de treballar en l'explotació pràctica de l'energia atòmica?*

MARGARIDA *El gran xoc.*

BOHR *M'aturo. S'atura.*

MARGARIDA *Així és com treballaven.*

HEISENBERG *Ell em mira, horroritzat.*

MARGARIDA *Finalment, ara sap on és i que està fent.*

HEISENBERG *Ell fa mitja volta.*

MARGARIDA *Just quan ha començat el xoc, ja s'ha acabat.*

BOHR *Ja tornem cap a casa, ràpidament.*

MARGARIDA *Ja estan tots dos escapant un de l'altre, en la foscor.*

HEISENBERG *La conversa s'ha acabat.*

BOHR *La nostra societat també.*

HEISENBERG *I la nostra amistat.*

En tota la representació van parlar tant dels progressos científics que van protagonitzar com de la repercussió històrica i moral de la fabricació de la bomba atòmica en el projecte Manhattan, en el qual va participar Bohr. I mentrestant, a Alemanya, Heisenberg seguia treballant per als nazis en la fabricació d'un reactor nuclear que també podria esdevenir una bomba. Sempre ens quedarà el dubte del grau de col·laboració real de Heisenberg en els avenços atòmics alemanys o si, de manera conscient, els va frenar. Però per què va anar a visitar Bohr el 1941? Què volia d'ell? La incògnita continua. . .

### **Copenhaguen, Barcelona, Madrid**

Si us heu quedat amb ganes de veure aquesta magnífica obra, teniu la oportunitat de fer-ho a Madrid. Del 23 de maig al 30 de juny de 2019 es representarà al Teatro de la Abadía, sota la direcció de l'argentí Claudio Tolcachir (*L'omissió de la família Coleman*) i amb l'actuació d'Emilio Gutiérrez Caba, Carlos Hipólito i Malena Gutiérrez. <http://www.teatroabadia.com/es/temporada/544/copenhague/>



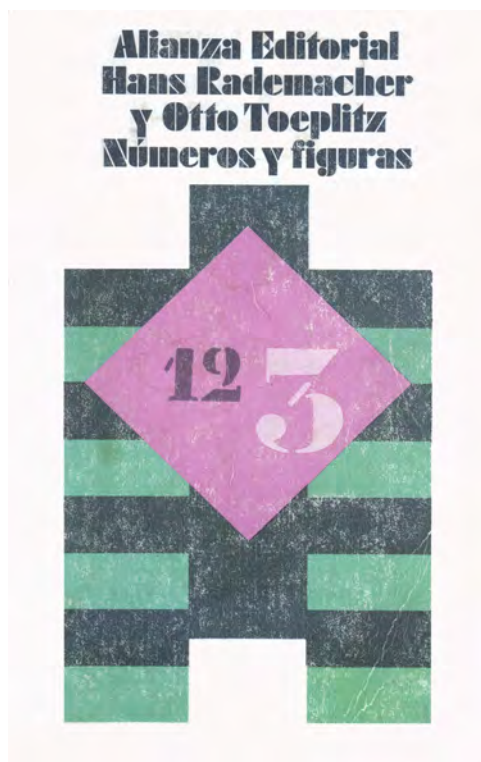


## «Números y figuras» de Hans Rademacher i Otto Toeplitz

Francesc Mañosas

Universitat Autònoma de Barcelona

El llibre de Hans Rademacher i Otto Toeplitz va ser publicat per primera vegada l'any 1930 amb el títol *Von Zahlen und Figuren* i ha esdevingut un clàssic de la divulgació matemàtica. Els dos autors van ser investigadors força actius. Hans Rademacher (1892-1969), alumne de Constantin Carathéodory, va centrar els seus treballs en la teoria analítica de nombres, mentre que Otto Toeplitz (1881-1940), que va ser deixeble de David Hilbert, és sobretot conegut per un criteri sobre transformacions regulars de successions que deixen el límit invariant. Un corol·lari d'aquest resultat és el conegut criteri de Stolz.



El llibre té 28 capítols independents. En cada un es presenta, es discuteix i es resol un problema diferent. Els temes que s'hi aborden estan majoritàriament relacionats amb la teoria de nombres i la geometria plana, tot i que hi ha dues magnífiques incursions en el món de la topologia. També hi trobem un parell de capítols dedicats als nombres irracionals i a les seves aproximacions per nombres racionals.

Els autors exposen i resolten alguns problemes isoperimètrics clàssics, argumenten el caràcter indispensable del compàs per a les construccions de la geometria elemental, fan consideracions sobre el triangle òrtic com un problema de mínims, i en definitiva tracten amb una gran elegància molts altres temes de la geometria analítica i sintètica: poliedres regulars, xarxes de corbes que es tallen, corbes tancades amb punts múltiples... Pel que fa a qüestions aritmètiques, donen bonics resultats sobre la distribució dels nombres primers (amb una deliciosa prova de la seva infinitud deguda a Euler), els nombres perfectes, el problema de Waring, els nombres pitagòrics... Hi trobareu també divertits problemes de combinatòria, un passeig pels fonaments de la mà de la teoria de conjunts i una introducció al problema dels quatre colors, per a la qual s'introdueix de manera molt intuïtiva la característica d'Euler i es demostra que cinc colors són suficients. Això és, tan sols, un petit tast de la gamma de temes tractats en el llibre.

### Indice

Introducción	7
1. La serie de los números primos	11
2. Redes de curvas que se cortan	18
3. Algunos problemas de máximos	24
4. Segmentos incommensurables y números irracionales	32
5. El triángulo órtico como un problema de mínimos	39
6. Una segunda demostración de la misma propiedad de mínimos	44
7. La teoría de los conjuntos	51
8. Algunos problemas de combinatoria	63
9. Sobre el problema de Waring	77
10. Sobre curvas cerradas con puntos múltiples	90
11. ¿Es única la descomposición de un número en factores primos?	98
12. El problema de los cuatro colores	109
13. Los poliedros regulares	121
14. Números pitagóricos y el teorema de Fermat	129
15. El teorema de las medias aritmética y geométrica	140
16. El círculo de dispersión de un conjunto finito de puntos	152
17. Aproximación de los números irracionales por medio de los números racionales	163
18. Producción de movimiento rectilíneo por medio de sistemas articulados	175
19. Números perfectos	189
20. La demostración de Euler de la infinitud de los números primos	198
21. Principios fundamentales de los problemas de máximos	204
22. La figura de mayor área con un perímetro dado	210
23. Fracciones decimales periódicas	216
24. Una propiedad característica del círculo	235
25. Curvas de anchura constante	240
26. Carácter indispensable del compás para las construcciones de la geometría elemental	260
27. Una propiedad del número 30	274
28. Una desigualdad perfeccionada	283
Notas y observaciones	289



Malgrat que els problemes abordats són profunds, els coneixements necessaris per poder seguir les argumentacions són del tot elementals. De fet, els raonaments poden ser perfectament entesos per qualsevol lector amb els coneixements d'àlgebra i geometria que s'imparteixen en l'educació secundària. Per descomptat, el lector ha de tenir interès i curiositat pel raonament matemàtic. L'exposició dels resultats i els arguments de les demostracions es fan amb una gran claredat didàctica.

Val a dir que molts dels teoremes i demostracions presentats són originals de personat-

ges clau de la història de les matemàtiques. Així, Euclides, Cantor, H.A. Schwartz, Fermat, Lagrange, Liouville, Euler, Jordan hi apareixen sovint citats, i algunes de les seves proves, reproduïdes.

Queda clar, doncs, que es tracta d'una obra molt adequada per als alumnes de batxillerat que mostren interès per les matemàtiques. D'altra banda, és també molt recomanable per a estudiants de grau i fins i tot per a matemàtics i científics en general. La lectura de cada un dels capítols constitueix un autèntic plaer per als qui ens dediquem professionalment a les matemàtiques.

## Relat breu: El caramel

Xavi Roca  
Institut RBIV Cambrils

L'altra nit vam anar al teatre. L'Àngela m'havia sorprès amb un sobre escrit amb la seva lletra infantil i suggerent, dins del qual vaig trobar dos rectangles de cartró plastificat amb els codis de barres, les numeracions dels seients, uns quants logos i el títol de l'obra. Incendis, de Wajdi Mouawad. Abans d'entrar vam comentar el tipus de públic que hi havia. La majoria era gent gran, jubilats que van al teatre per tradició, residus i resistència de la vella burgesia de la ciutat de Reus. Vam pujar fins a l'últim pis i vam prendre el nostre seient al galliner. De seguida ens vam adonar que, tan lluny de l'escenari, hauríem de forçar una mica la vista, tolerar el cruixir dels seients cada vegada que algú canviés de postura, i aguditzar l'oïda. Tot i així jo em sentia feliç de ser allà, li vaig agrair un cop més a l'Àngela el seu regal, i em vaig concentrar en l'obra. Els actors em van agradar, vaig entrar sense esforç en l'argument, i vaig pensar que havia d'anar més al teatre, que per què dimonis no ho feia més sovint. Tot anava bé, la vida era meravellosa quan un la condimentava amb cultura, i l'Àngela simbolitzava aquesta il·luminació inspiradora. D'aquesta espècie d'amor instantani, d'aquest retrobament amb el magnetisme de l'art, va sorgir llavors un sentiment molt intens per ella, pels seus detalls, per com parla, per com pensa i per com sent. Tot estava bé en aquells seients als quals cada vegada ens acostumàvem més, però llavors l'Àngela em va oferir un caramel.

En aquell moment, xuclar un caramel em va semblar una activitat idònia. La funció duraria unes tres hores i absorbir amb intencionada i extremada lentitud aquell caramel, vaig pensar que seria una bona metàfora del gaudi lent i esmicolat que ens esperava. El vaig acceptar, i després de la breu batalla per no fer soroll amb l'embolcall, va començar l'experiència. Al principi vaig percebre la presència del caramel amb claredat. A través de la llengua, em vaig imaginar uns rierols minúsculs que em mullaven el coll amb el seu gust, crec recordar que de taronja. Em van venir llavors records d'infància, de quan em bevia els gots de Fanta que em donava la meva mare a glops molt curts perquè em durés més, i de com discutia amb les meves dues cosines sobre les seves estratègies respecte al mateix assumpte. En un altre moment hauria mossegat el caramel, destruït els vidres interns i fer-lo cruixir per obtenir una sola dosi, més ràpida i intensa. Però aquesta vegada no. L'obra progressava amb solvència i el guió proposava unes superposicions temporals que funcionaven, i que m'agradaven. No em perdia detall del que passava a l'escenari però, al mateix temps, analitzava les evolucions del caramel dins la boca, com si estigués veient una pel·lícula muda per un canal, i escoltant una música independent per l'altre.

Vaig descobrir llavors que, tot i haver-hi una relació directa entre la periodicitat i la força de les meves absorcions amb el grau d'intensitat

amb què notava el gust del caramel, hi havia un flux que se m'escapava. Si jo exercia una breu i lleugera força sobre el caramel, sentia el gust de la mateixa manera, breu i lleugera. Però si llavors immobilitzava la musculatura, encara que estigués molt disminuïda, percebia un minúscul corrent de caramel desfent-se, avançant sense el meu permís. Imagino que el simple contacte amb la saliva el dissolia de manera independent a la meva voluntat. Durant un temps em vaig mantenir atent a les dues obres, la de teatre i la del caramel, i em vaig concentrar a detectar el moment exacte que el caramel arribés a la seva fi. Per desgràcia no ho vaig aconseguir perquè llavors el text es va imposar per sobre de tot, i em vaig oblidar del caramel.

En una de les escenes, un dels personatges va resultar ser professora de matemàtiques, i va parlar sobre la solitud dels matemàtics, sobre el grau d'abstracció de les seves teories, i sobre la insolubilitat de certs problemes. Era el paràgraf d'introducció a un curs de teoria de grafs, una assignatura que sempre em vaig penedir de no haver cursat a la universitat.

Un graf no és res més que un conjunt de punts i de camins que els uneixen, un concepte senzill i del qual es desprenen molts teoremes i aplicacions boniques. El text explicava el concepte de graf de visibilitat d'un polígon del pla (una representació dels vèrtexs que es poden veure entre ells) i el relacionava amb la complexa trama familiar de l'obra. La idea em va semblar genial. Em vaig girar cap a l'Àngela i la vaig mirar amb les celles arquejades, i ella em va picar l'ullet. L'actriu parlava de la insolubilitat del problema invers a l'habitual: donada una aplicació teòrica, trobar el seu graf de visibilitat, i per tant el polígon concordant. Després subratllava que, precisament en la impossibilitat de trobar solucions a aquest problema, hi residia la seva bellesa. La idea no em resultava nova, i vaig pensar en els teoremes de Gödel. Però veure-la aplicada a una obra com aquella em va tornar a semblar genial. Va ser llavors quan, absort en els records universitaris i en el perquè d'aquella inexistència de solucions, em vaig adonar que s'havia consumit el caramel.

Jo no sé per què m'afecten tant aquestes coses, però he de reconèixer que allò em va entristir. Vaig pensar que la meva boca, l'obra

de teatre i el caramel formàvem el nostre propi graf, i que jo havia estat incapaç de mantenir vius els nostres camins. El meu desig era haver estat capaç d'assistir al moment que el caramel desaparegués, com si pogués presenciar l'instant exacte que una magnitud que s'esvaeix arriba a la quantitat zero. Tampoc exageraré i diré que allò em va torbar en excés, però sí confesso que no vaig poder oblidar-ho. Poc després la funció va arribar a la seva pausa, i vam sortir a fumar. Després de comentar el primer acte, li vaig explicar a l'Àngela el que m'havia passat amb el caramel. Li va semblar divertit, i em va dir que no em preocupés, que encara li'n quedaven més. En aquell moment em vaig sentir avergonyit d'actuar com un nen, però també feliç per veure aconseguit el meu desig, i impacient per tornar a pujar al galliner. Un cop asseguts, li vaig demanar el caramel i me'l vaig posar a la boca amb una serietat més pròpia d'un experiment científic, com si en lloc d'un simple caramel m'estigués posant a la boca una càpsula amb una droga experimental, l'efecte de la qual em preparava per investigar. Aquest cop em vaig esforçar a no moure ni un sol múscul de la boca, i a deixar que aquell flux inevitable de gust actués per si sol. L'obra seguia el seu curs i jo seguia immòbil, pendent de si es desfeia, i a quina velocitat ho feia. Per la seva banda, la història responia als seus interrogants a un ritme convincent, però ja no hi havia referències matemàtiques. Estar concentrat en els dos objectes no representava gaire esforç, però hi va haver un moment que tot allò em va semblar ridícul, i vaig pensar que m'estava comportant d'una manera capritxosa, volent repetir un plaer la bellesa del qual consistia en la seva unicitat, i no a produir-se quan a mi em vingués de gust. Cansat d'esperar, vaig exercir llavors per primera vegada una succió a aquest segon caramel. La impressió que em va produir no va ser tan clara com esperava, suposo que a causa del temps que portava instal·lat a la meva boca, havent-me embolicat en el seu sabor la saliva. El sorprenent va ser que, just llavors, la mateixa actriu d'abans va tornar a parlar sobre matemàtiques.

En aquell moment em vaig tensar. Havia dubtat de mi mateix, havia pensat que les meves preocupacions eren ximpleries, però ara l'atzar em donava la raó. La situació del primer acte s'estava repetint, i em vaig preparar,

aquesta vegada, per fer-ho millor. M'hauria agradat disposar de més caramel per gaudir d'aquest segon intent, però, tot i petit, el seu volum era acceptable, així que vaig reprendre la concentració per no perdre el fil de cap dels altres dos vèrtexs —l'obra i el caramel— del meu nou graf. L'actriu va parlar llavors de la conjectura de Siracusa, una proposició que afirma que, si un pren qualsevol nombre natural, i li aplica unes determinades operacions, sempre s'acaba obtenint el número  $u$ . L'algoritme consisteix a dividir per dos quan es té un nombre parell, i calcular el triple més  $u$  si es té senar. A la conjectura de Siracusa se la coneix també com els «nombres de calamarsa», i tot i que s'ha comprovat amb infinitat de nombres que sempre acaba en el número  $u$ , encara ningú no ha trobat la demostració teòrica.

Era la segona idea matemàtica que apareixia a l'obra i em va semblar igual de bona que l'altra, però aquesta vegada jo tenia clar que no em deixaria despistar, i vaig seguir atent a les evolucions del caramel. Per il·lustrar en què consistia la conjectura i comprovar que funcionava, el personatge va posar un exemple. Va començar per un nombre que no recordo, i va aplicar tots els passos de l'algoritme. Cada vegada que obtenia un nombre parell, el dividia per dos, però si n'obtenia un de senar, llavors el multiplicava per tres i li sumava  $u$ . En aquell moment no vaig poder evitar perdre'm en associacions d'idees, encara que aquesta vegada aplicades al caramel. D'una manera ràpida, gairebé instintiva, em vaig trobar aplicant l'algoritme de la conjectura de Siracusa, dins de la meua boca. Cada vegada que es produïa una divisió per dos, jo xuclava el caramel imaginant que l'atreïa cap als meus sentits, de la mateixa manera com ho fan els números de calamarsa quan s'acosten a l' $u$ . Per la seva banda, quan sortia un nombre senar i llavors calia multiplicar per tres i sumar  $u$ , jo relaxava la boca, pensant que així permetia que el caramel s'allunyés, tot i saber que, tard o d'hora, tornaria cap a mi.

Just abans de començar a sincronitzar les succions de la meua boca amb les operacions que recitava l'actriu, el volum del caramel ja havia disminuït, i suposo que, per això mateix, se'm va ficar al cap acabar-me'l al mateix temps que l'actriu arribés al número  $u$ . Atret per la

bellesa de les simetries i les sincronies, em va semblar que aquella era una coincidència perfecta en aquell moment, així que vaig començar a xuclar amb més força cada vegada que calia dividir per dos. L'objectiu, en realitat, no era gaire factible. L'actriu recitava els càlculs amb força velocitat, i en canvi la desintegració d'un caramel acostuma a ser lenta. Tot i això, vaig insistir tant a xuclar en el moment adequat que, quan l'actriu finalment va arribar al número  $u$ , em vaig passar de força, i em vaig empassar el que quedava de caramel.

En aquell moment em vaig quedar paratitzat. Havia acabat el meu segon caramel, havia fet coincidir el seu final amb el final de la conjectura, però no havia respectat la condició que la seva consumació fos lenta, ja que me l'havia empassat de cop. Llavors vaig tornar a sentir-me ridícul per dedicar-me a estupideses com aquelles i tenir aquell tipus de pensaments, i em vaig dir que ja n'hi havia prou de rucades, que em concentrés d'una vegada en l'obra. Després del sorprenent gir en què el pare d'una de les protagonistes resultava ser al mateix temps el seu germà, l'obra va arribar a la part final. Jo ja no pensava en el caramel però llavors, a través d'un altre dels personatges, el guió va tornar a fer referència a les matemàtiques. Aquesta vegada es discutia sobre la veracitat de la fórmula  $u$  més  $u$  igual a dos. En aquest cas, el símil proposat era més senzill. Si el germà era també el pare, és que dues persones eren la mateixa, és a dir,  $u$  més  $u$  era igual a  $u$ , el mateix resultat que a la conjectura de Siracusa. En aquell moment vaig pensar en els caramels, però, fart de desconcentrar-me en preocupacions absurdes, vaig decidir ignorar-me a mi mateix.

L'obra va acabar, els aplaudiments van durar una merescuda eternitat, i després vam sortir del teatre. Als dos ens havia encantat l'obra, i vam anar a fer una cervesa per comentar-la. Abans d'arribar, però, l'Àngela em va preguntar pel segon caramel. Em va fer una mica de vergonya explicar-li què havia passat i en què havia pensat, però ho vaig fer. Li vaig explicar llavors que, després de sentir-me identificat mitjançant el caramel, primer amb la idea dels grafs i després amb la dels números de calamarsa, l'únic que em quedava pendent era trobar alguna cosa dins meu que li donés sentit al fet que  $u$  més  $u$  podria ser igual a  $u$ .

L'Àngela em va mirar amb uns ulls entremaliats i somrients, i es va prendre un temps per parlar. Es va aturar, em va agafar una mà amb la seva, i amb l'altra va buscar alguna cosa a la bossa. Vaig trigar poc a endevinar què feia. En efecte, va treure un tercer caramel, va obrir la mà per ensenyar-me'l, i em va dir:

— Se t'ha escapat el primer caramel... I t'has empassat el segon caramel.

Mentre deia això va moure el dit índex dues vegades, representant la suma d'u més u. Com si estigués fent-me un truc de màgia, va acostar llavors el tercer caramel.

— Quants caramels veus aquí?

— Un —li vaig respondre.

— Doncs ja ho tens. U més u és igual a u.

Després d'allò, no hi havia altra opció que riure. Avui, dies després, escric sobre això sense la menor idea ni de la utilitat, ni del significat del que va passar. Tampoc sé per què ho escric. L'única reflexió que se m'acut és que sí, que hauria d'anar més al teatre. Així que, Àngela, si estàs llegint això, fes el favor de mirar el correu. T'he enviat un enllaç amb una obra que té bona pinta. És a Barcelona, però si et ve de gust podem anar a veure-la. Ah, i no et preocupis. Aquesta vegada porto jo els caramels.

## Racó biogràfic

### Leonhard Euler (1707–1783): el mestre de tots nosaltres

Maria Rosa Massa-Esteve

Universitat Politècnica de Catalunya

El segle XVIII va ser un període de desenvolupament de la transmissió del coneixement científic a través de les acadèmies i de les seves publicacions, de la correspondència i dels viatges europeus de reis, emperadors i científics. Considerat un dels matemàtics més prolífics de la història, Leonhard Euler (1707–1783), (Youschkevitch, 1971; Calinger, 2015), que durant la seva vida va viatjar des de Basilea fins a Sant Petersburg, on va fer-hi dues estades i també una estada a Berlín, se'ns presenta com un dels protagonistes d'aquesta circulació del coneixement (Massa-Esteve, 2018).

De fet, Euler al llarg de 873 memòries i llibres va contribuir al desenvolupament de la hidràulica, la hidrodinàmica, la teoria dels vaixells, l'elasticitat i la mecànica dels cossos rígids, així com de la teoria de nombres, de les sèries infinites, del concepte de funció, de les funcions de variable complexa, de les equacions diferencials, del càlcul de variacions, de l'astronomia, etcètera (Gray, 1985). Les seves obres completes contenen 70 volums (unes 25.000 pàgines) i si el pes relatiu quantitatiu és considerable no ho és menys el seu pes qualitatiu.

Com exposarem més endavant, una de les contribucions més importants d'Euler a la història de les matemàtiques van ser els treballs sobre anàlisi algebraica, que van constituir els pilars del desenvolupament de l'anàlisi real dels segles posteriors.



Figura 1. Leonhard Euler (1707–1783)



## La vida d'Euler

Euler va néixer el 15 d'abril de 1707, a Basilea (Suïssa), en el si d'una família vinculada a la fe calvinista, tant el seu pare com el seu avi en van ser ministres. Va entrar a la Universitat de Basilea als tretze anys i va estudiar matemàtiques amb un dels millors matemàtics de l'època, Johann Bernoulli (1667-1748). A més, Bernoulli li feia classes setmanals els dissabtes a la tarda, li recomanava textos per llegir i l'ajudava en qüestions sobre conceptes matemàtics, mètodes de demostració i resolució de problemes (figura 1).

Les primeres contribucions d'Euler són de quan tenia 19 o 20 anys. Ja l'any 1727 Euler va obtenir el segon premi en un concurs sobre temes d'investigació convocat per l'Académie des Sciences de París. En el seu treball estudiava la manera més eficient de col·locar els pals en un vaixell. Va intentar quedar-se a la Universitat de Basilea, però no ho va aconseguir (Calinger, 2015, 35). Per recomanació de Christian Wolff (1700-1782), el 1726, el president de la recentment inaugurada Acadèmia de Ciències i Arts de Sant Petersburg (figura 2), Laurent Blumenstrot (1692-1755) li va demanar a Euler que s'hi incorporés i aquest va acceptar.



Figura 2. Acadèmia de les Ciències i Arts de Sant Petersburg

Aquesta acadèmia de Sant Petersburg va ser projectada durant molts anys per Pere el Gran (1672-1725), quan va viatjar per Europa amb l'objectiu de familiaritzar-se amb les invencions i els nous desenvolupaments de la Il·lustració europea. Un document amb el projecte d'aquesta acadèmia va ser presentat al Senat de Rússia per Pere el Gran el gener del 1724. Allà s'especificava que hi hauria tres departaments, un de ciències matemàtiques, un de física i química experimentals i, seguint l'Acadèmia de Berlín, fundada per Leibniz el 1700, un tercer

d'humanitats. Encara que Pere el Gran va morir el gener del 1725, a finals d'aquest mateix any la seva vídua Caterina I la va inaugurar (Gouzévitch i Gouzévitch, 2008; Schulze, 1985; Gordin, 2000).

Més tard, el 5 d'abril del 1727, Euler va abandonar Basilea per incorporar-se a l'Acadèmia de Sant Petersburg i va roman-dre allà durant 14 anys impartint classes i col·laborant en l'organització (Calinger, 1996). Entre els científics que van arribar a l'acadèmia entre el juny i el desembre del 1725 hi havia: Jacob Hermann (1678-1733), Joseph-Nicolas Delisle (1688-1768), Christian Goldbach (1690-1764), Georg Bernhard Bülfinger (1693-1750), Friedrich Christoph Mayer (1697-1729), Nicolas Bernoulli (1695-1726), i Daniel Bernoulli (1700-1782). Aquests acadèmics eren obligats a trobar-se cada setmana per presentar i debatre temes científics molt diversos, que abastaven des de la forma de la Terra fins a si les creences cartesianes, newtonianes i wolffianes que hi havia vida a la Lluna es podien confirmar (Massa-Esteve, 2017). Els acadèmics havien de publicar els seus resultats i contribucions en les actes de l'Acadèmia titulades *Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*. De fet, Euler participava activament en aquestes trobades i en els projectes que el Govern encomanava a l'acadèmia per trobar solucions a problemes tecnològics, com ara el disseny de mapes, o bé la construcció de vaixells, encara que les seves principals contribucions van ser en matemàtiques: anàlisi, teoria de nombres i mecànica. Així, el 1741 ja tenia preparats uns 90 treballs dels quals en va publicar 55, inclosos dos volums de mecànica.

D'aquesta primera etapa assenyalarem dos fets, el seu matrimoni a finals del 1733 amb Katharina Gsell, filla del pintor suís G. Gsell, amb qui va tenir tretze fills, cinc dels quals van morir essent infants, i, a més, que a causa d'unes febres, Euler va perdre l'ull dret el 1738.

A la mort d'Anna Leopoldovna, regenta d'Ivan VI, el 1740, i en veure el seu futur incert (a causa, possiblement, de la seva condició d'estranger), el 1741, Euler va acceptar la invitació de Frederic II el Gran de Prússia per incorporar-se a l'Acadèmia de Ciències de Berlín (figura 3).

En arribar a Berlín, el país es trobava enmig d'una gran crisi i Euler va haver de donar classes particulars per mantenir la seva família. Així ho va fer amb la princesa Filippina Von Schwendt (dama de la noblesa parenta del rei Frederic) i aquestes lliçons, més endavant, van ser publicades a Rússia en tres volums, el primer el 1768 i el darrer el 1772, amb el títol: *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*. Aquesta obra, considerada una de les primeres obres de divulgació científica, va tenir molt d'èxit i se'n van fer dotze edicions en el francès original, nou en anglès, sis en alemany, quatre en rus i dues en suec. També n'hi ha d'italianes, espanyoles i daneses (Massa-Esteve, 2007).



Figura 3. Entrada de l'antiga Acadèmia de Ciències de Berlín

Encara que Euler a Berlín treballava per a les dues Acadèmies (la de Sant Petersburg i la de Berlín), el 1744 esdevingué el promotor de la transformació, junt amb Maupertuis, que n'era el president, de l'antiga Societat de Ciències de Berlín en la Reial Acadèmia de Ciències i

Belles Arts de Berlín. Euler va ser nomenat director de la classe de matemàtiques d'aquesta acadèmia i membre del seu comitè directiu; al mateix temps que dirigia la biblioteca, formava part de la comissió de revisió de publicació dels treballs científics.

Durant aquest període, Euler va incrementar considerablement la varietat de les seves investigacions. Va competir amb Jean Le Rond D'Alembert (1717–1783) i amb Daniel Bernoulli per establir els fonaments de la física matemàtica i va ser també protagonista de rellevants discussions amb Clairaut i D'Alembert sobre la teoria dels moviments de la Lluna i dels planetes. Alhora, Euler va elaborar la teoria del moviment dels sòlids, va crear l'aparell matemàtic de la hidrodinàmica, va desenvolupar amb èxit la geometria diferencial de superfícies, i va estudiar intensivament òptica, electricitat i magnetisme. Euler va prendre part en molts debats i discussions sobre diverses temàtiques científiques i filosòfiques, com ara sobre les *monadologies* de Leibniz i de Wolff, el principi de mínima acció de Maupertuis, els logaritmes dels nombres negatius, la solució de l'equació de la corda vibrant, etcètera. Al llarg de la seva estada a Berlín va preparar no menys de 380 treballs, dels quals se'n van publicar 275, incloent-hi diversos llibres d'extensió considerable.

El 1759, Maupertuis va morir i Euler va esdevenir la figura de referència a l'acadèmia sota la supervisió del rei Frederic II el Gran. Les diferències entre el rei i Euler eren evidents, tant en el caràcter com en la manera d'entendre i valorar la ciència. El rei estimava la poesia i li semblaven poc pràctiques les matemàtiques; diuen que a Euler l'anomenava «ciclopi matemàtic». Quan el 1763 Euler va saber que el rei pensava nomenar D'Alembert president de l'acadèmia, va escriure a Sant Petersburg i Caterina II la Gran li va fer una oferta per tornar-hi. De fet, D'Alembert no va acceptar, però altres conflictes de tipus financer, durant el 1765, entre Euler i el rei, el van decidir a anar-se'n i el 9 de juliol de 1766 va abandonar Berlín.

En el seu retorn a Sant Petersburg va ser rebut amb grans honors, tot i que en arribar-hi va perdre totes les seves possessions en un incendi i, poc temps després, el 1773 va morir

la seva dona. Tanmateix, tres anys més tard es va casar amb la seva cunyada.

En la seva segona estada a Sant Petersburg, l'acompanyaven tres dels seus fills. Un d'ells, Johann Albrecht, va esdevenir acadèmic, va ocupar la càtedra de física i, a partir del 1769, va ser nomenat secretari permanent de l'acadèmia.

Poc temps després d'instal·lar-se de nou a Sant Petersburg, una malaltia va deixar Euler completament cec, no podia llegir i escrivia amb guix en una pissarra amb grans lletres. Malgrat la ceguesa, les seves activitats científiques no van cessar. La seva memòria era fantàstica i tenia molts ajudants, entre els quals els seus fills, i alguns deixebles i acadèmics que ell convidava. Tot sovint, dictava els seus treballs, però la majoria de les vegades s'establí una discussió i Euler desenvolupava les seves idees, calculava mentalment taules i donava exemples. Els articles d'Euler de la segona estada a Sant Petersburg eren breus per causa de la ceguesa. Tot i això, va escriure diversos llibres amb l'ajuda del seu fill Albrecht i alguns acadèmics.

Euler va continuar participant amb altres activitats a l'Acadèmia de Sant Petersburg. Junt amb el seu fill, era membre de la comissió que dirigia aquesta entitat, encara que el 1774 van deixar-ho a causa de les seves diferències amb Orlov, que n'era el president. Va treballar fins a l'últim dia de la seva vida. Era el 18 de setembre de 1783, Euler va fer classe de matemàtiques als seus nets. Després va fer uns càlculs a la pissarra i més tard es va reunir amb Lexell i Fuss per discutir sobre el planeta Urà, que s'acabava de descobrir. A les cinc de la tarda es va asseure i va dir: «M'estic morint». Efectivament, a les set de la tarda d'aquell mateix dia moria Euler, el gran geni de les matemàtiques. Immediatament després de la seva mort va rebre molts homenatges per part de l'Acadèmia de Sant Petersburg, de l'Académie de Sciences de París i de la comunitat científica europea. Les seves restes mortals es troben a Sant Petersburg.

### Les contribucions d'Euler

En els seus treballs, Euler presentava les matemàtiques connectades amb les aplicacions a

altres ciències, a problemes tecnològics i a la vida pública. Les seves contribucions abracen els coneixements de les matemàtiques pures i les matemàtiques mixtes, que es troben a la classificació de les matemàtiques del 1754 de l'*Encyclopédie* de D'Alembert. Els enciclopedistes havien recollit les idees i la classificació de les matemàtiques feta per Francis Bacon el 1605 en matemàtiques pures: la geometria i l'aritmètica; i, en matemàtiques mixtes: la perspectiva, la música, l'astronomia, la cosmografia, l'arquitectura, l'enginyeria, etc. (Massa-Esteve *et al.*, 2011). Per aquest motiu no ens ha d'estranyar que Euler, com a bon il·lustrat, treballés en un gran ventall de temàtiques que avui identifiquem com a diferents disciplines o, fins i tot, com a disciplines independents de les matemàtiques.

Així, ja l'any 1727, va escriure primer una memòria sobre el so (Knobloch, 2008) i tres textos: un sobre les trajectòries recíproques en la geometria diferencial, un segon sobre la tautòcrona en la mecànica i un tercer sobre l'elasticitat de l'aire.

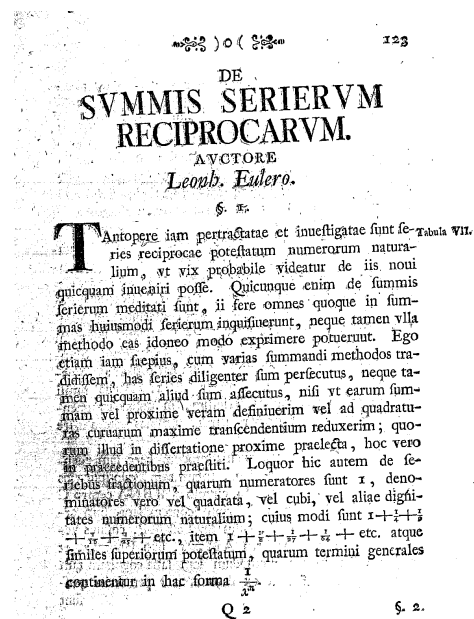


Figura 4. Portada de *Summis serierum reciprocarum* (1735)

En la seva primera estada a Sant Petersburg va tractar amb sèries infinites, com ara l'integral Beta (1729), els sumatoris de sèries infinites (1735) i el problema de Basilea (1735) (Calinger, 1996). A la correspondència d'Oldenburg trobem una carta del 26 de febrer de 1673



de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) que expressava el seu interès en el treball de sèries de Pietro Mengoli (1626/27–1686). Oldenburg li va contestar (6 de març de 1673) reenviant una carta de John Collins en què l'autor explicava que Mengoli havia trobat la suma de sèries infinites amb els números figurats en el denominador i, a més, la demostració de la divergència de la sèrie harmònica. Tanmateix, Mengoli no havia estat capaç de trobar la suma infinita dels recíprocs dels números quadrats que és el que ara s'anomena «problema de Basilea». Euler va trobar i demostrar la solució, a la tardor del 1735, una sisena part de pi al quadrat, i li va comunicar al seu amic Daniel Bernoulli (figura 4).

Euler va publicar els seus dos volums de mecànica: *Mechanica sive motus scientia analytice exposita* (1736) i també va solucionar el problema dels Ponts de Konisberg (1735–pub. 1741).

En la seva estada a Berlín va escriure una monografia sobre el càlcul de variacions (1744) (Fraser, 1994); un treball fonamental sobre el càlcul d'òrbites (1745); un treball sobre artilleria i balística (1745); un llibre d'anàlisi que va esdevenir fonamental per al desenvolupament de l'anàlisi: *Introductio in Analysin infinitorum* (1748) (figura 5), com després explicarem; un tractat sobre vaixells i navegació, preparat ja en una versió anterior a Sant Petersburg (1749); la seva primera teoria del moviment de la Lluna (1753); un volum de càlcul diferencial: *Institutiones calculi differentialis* (1755), i, finalment, el tractat sobre la mecànica de sòlids: *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* (1765).

De la seva segona estada a Sant Petersburg destaquem les 775 pàgines de *Theoria motuum lunae...* (1772), que van ser completades amb l'ajuda del seu fill Albrecht, i els acadèmics Krafft i Lexell, que se citen en el títol del llibre. Krafft també el va ajudar en els tres volums de *Dioptrica* (1769–1771). Tot i això va publicar els tres volums d'*Institutiones calculi integralis* (1768–1770), les principals parts de la qual ja havia acabat a Berlín. També va publicar una versió abreujada de *Scientia navalis. Théorie complète de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux* (1773), que va ser traduïda a l'anglès, italià i rus, i que li va proporcionar

grans sumes de diners dels governs rus i francès. Fuss, jove suís, convidat per Euler, el va ajudar a preparar l'obra *Éclaircissements sur les établissements publics...* (1776), que va ser molt influent en el desenvolupament de les assegurances: moltes companyies empraven els seus mètodes de solució i les seves taules.

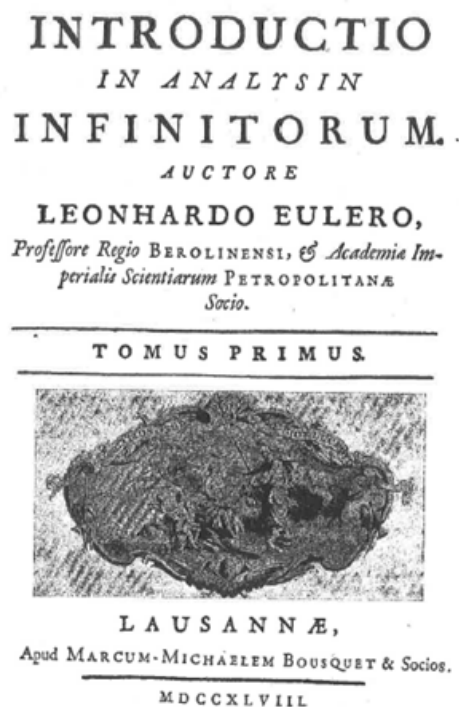


Figura 5. Portada de la *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748)

Euler era un creador, en les seves contribucions va intentar obrir nous camps, i així va donar a conèixer nous símbols, com ara el nombre  $e$  per representar la base dels logaritmes, el nombre  $i$  per representar els complexos, la lletra  $F$  i els parèntesis per a les funcions; també va donar noves definicions, noves fórmules, nous polinomis (anomenats «d'Euler»), integrals eulèriques, línies d'Euler, etcètera. No obstant això, les seves contribucions van ser decisives sobretot en tres àrees: en el càlcul de diverses variables, especialment aplicat a la física amb la introducció de les equacions amb derivades parcials; en la teoria i aplicació de les equacions diferencials ordinàries i, finalment, en l'ús dels mètodes analítics i procediments algebraics en diferents parts de la matemàtica (Ferraro, 2010; Fraser, 1989).



## L'anàlisi algebraica: la contribució d'Euler

La publicació l'any 1591 de l'obra *In Artem Analyticen Isagoge* de François Viète (1540-1603) va ser un dels punts clau per al desenvolupament dels procediments algebraics en la matemàtica. Viète va introduir a la seva obra una nova àlgebra emprant la seva logística especiosa, on els símbols d'aquesta art analítica (o àlgebra) poden ser emprats per representar no només nombres, com en els treballs precedents del Renaixement, sinó també valors de qualsevol magnitud, ja siguin longituds, superfícies, volums o angles. Els procediments analítics li permetien afirmar que amb aquestes eines podia solucionar tots tipus de problemes. Amb la difusió dels treballs de Viète, molts altres autors van començar a considerar la utilitat del llenguatge simbòlic i dels procediments algebraics per resoldre tot tipus de problemes i per obtenir nous resultats (Massa-Esteve, 2006). Aquest procés d'algebrització de les matemàtiques va ser desenvolupat primerament amb la creació de la geometria analítica a través de les obres de René Descartes (1596-1650) i Pierre de Fermat (1601-1655), i amb les contribucions al càlcul diferencial a través dels treballs d'Isaac Newton (1642-1727) i Leibniz.

Més tard, en el segle d'Euler, ja es va treballar per difondre i estudiar aquests treballs, tot aplicant els procediments analítics per construir nous teoremes, nous objectes, noves regles i nous mètodes. Així, figures com Daniel Bernoulli, D'Alembert, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Pierre-Simon Laplace (1749-1827) i el mateix Euler van anar perfeccionant els mètodes analítics i els van utilitzar per solucionar satisfactòriament problemes celestes i terrestres. De fet, es pot afirmar que amb els desenvolupaments analítics dels seus treballs, aquest grup d'autors van posar els fonaments per a la creació d'una nova branca de les matemàtiques anomenada «anàlisi».

Es poden esmentar algunes evidències a les contribucions d'Euler a l'anàlisi; així, en la seva primera estada a Sant Petersburg, per exemple, les seves contribucions a les sèries infinites que emprava per calcular les integrals Beta (1729) i alguns exemples d'equacions a la mecànica (1736); però el més

important van ser les contribucions a la resolució d'equacions sistemàticament sumariades per Euler en el seu famós llibre sobre la introducció a la teoria de funcions (1748), en la seva obra sobre diferenciació (1755), en la d'integració (1768-1770), així com en l'àlgebra (1770).

A tall d'exemple, adjuntem alguns dels seus raonaments en deduir el valor de la integral Beta  $B(3/2, 3/2)$  en un text que va presentar a l'Acadèmia de Sant Petersburg el 1729, i que va publicar el 1730 a *Comentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, titulat «De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt».

(«Sobre les progressions transcendents», és a dir, aquelles que els termes generals de les quals no es poden expressar algebraicament) (Dutka, 1991; Delshams & Massa-Esteve, 2008).

En aquest text, Euler, a través de 29 apartats, vol trobar el terme general d'una progressió formada pels termes, 1, 2, 6, 24, ..., és a dir,  $n!$ , i remarca la seva preocupació, ja que sap que no es pot expressar algebraicament per a tots els valors de  $n$ . Donats  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , trobar el «terme general» per a nosaltres vol dir trobar l'expressió (funció)  $f(x)$ , tal que  $a_n = f(n)$  de tal manera que el valor an pot ser extrapolat per valors no enters de  $n$ :  $a_x = f(x)$ .

Vegeu com Euler raona que és possible que el terme general d'aquesta progressió no tingui només termes algebraics, sinó també termes que depenen de quadratures (expressió emprada per designar el que avui anomenem «àrees» o «integrals definides»).

«Jo havia suposat prèviament que el terme general de les sèries 1, 2, 6, 24 ..., podia ser donat, si no algebraicament, com a mínim exponencialment. Però, després d'haver vist que alguns termes intermedis depenen de la quadratura del cercle, vaig reconèixer que ni quantitats exponencials ni algebraiques són adequades per expressar-ho. Per al terme general d'aquesta progressió s'han d'incloure altres quantitats que depenen de la quadratura del cercle o d'altres quadratures, però que no poden ser representades per

cap fórmula algebraica o exponencial. Em preguntava de quina manera les fórmules diferencials serien apropiades per expressar el terme general de la progressió. Un terme general ha de tenir  $n$  per substituir i trobar els termes. Però una fórmula diferencial ha de contenir alguna quantitat variable. No té sentit prendre  $n$ ,  $n$  no és la variable d'integració, sinó que, després que la fórmula hagi estat integrada,  $n$  hauria de servir per a la formació de la progressió.» (Euler, 1730, 39)

Pel que fa al procediment analític en aquest cas, podem constatar la facilitat d'Euler en el seu ús de l'infinit i també remarcar com calcula amb les sèries infinites de manera formidable (Ferraro, 2007). Així comença calculant la Beta integral amb el desenvolupament de la fórmula del binomi obtenint un producte infinit. Vegeu aquests desenvolupaments a Delshams & Massa-Esteve (2008).

$$\int_0^1 x^e dx (1-x)^n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n}{(e+1) \cdot (e+2) \dots (e+n+1)}.$$

El tractament de la idea d'interpolació en l'obra d'Euler és també original. De fet, Euler no calculava ni interpolava deduïnt una generalització a partir dels càlculs fets cas per cas, sinó que més aviat buscava una expressió general algebraica on poder manipular i trobar tots els termes, inclosos els termes intermedis (Delshams & Massa-Esteve, 2008; Massa-Esteve & Delshams, 2009).

Euler també va eliminar gradualment l'evidència geomètrica en les seves proposicions del càlcul integral. Es pot observar que Euler calculava un gran nombre d'integrals definides que corresponien a quadratures (àrees) de figures geomètriques, i en cap cas dibuixava la figura que estava quadrant. A més, tampoc no descrivia de manera retòrica els elements que permetrien dibuixar la figura geomètrica que quadrava.

Mitjançant procediments analítics, no geomètrics, va buscar la relació entre els exponents de les expressions algebraiques de les figures que quadrava i els valors de la quadratura. D'aquesta manera, establia una classificació

de les integrals que permetia demostrar al mateix temps moltes propietats de cada tipus, sense necessitat de fer-ho cas per cas. (Capobianco *et al.*, 2017; Delshams&Massa-Esteve, 2008).

Euler considerava l'anàlisi algebraica una part de les matemàtiques, ja que els seus procediments facilitaven la generalització i la comprensió de les solucions dels problemes de corbes i dels problemes de mecànica, a través de l'establiment d'equacions i funcions que a més analitzava amb procediments infinits. Efectivament, Euler va desenvolupar una teoria analítica de funcions i una teoria analítica d'integració. Realment, les contribucions d'Euler a l'anàlisi algebraica van esdevenir el llegat més important, ja que van constituir el punt de partida per a la construcció de l'anàlisi real. Així, el 1786 quan Euler ja havia mort, Condorcet ja emfasitzava aquest punt en el seu elogi: «I un no podrà evitar de mirar l'obra d'Euler com la revolució que ha tornat l'anàlisi algebraica un mètode lluminós, universal, aplicable a tot i fins i tot fàcil». (Condorcet, 1786).

## Algunes reflexions

A l'edat de 20 anys, Euler va arribar a treballar en una dinàmica acadèmia creada per Pere el Gran. Allà va aprendre i al mateix temps va millorar el seu coneixement mitjançant les interaccions amb els altres acadèmics, com ara Hermann, Bernoulli, Delisle i Goldbach. A més, l'acadèmia li va donar la gran oportunitat de fer recerca i ampliar el ventall de temes d'investigació. És important assenyalar que les trobades setmanals a l'acadèmia per debatre temes científics i les seves corresponents publicacions van donar lloc a una extraordinària quantitat de material per a la investigació i el progrés del coneixement científic.

La contribució d'Euler es pot veure com la materialització del projecte de Pere el Gran. L'esperit d'Euler, combinant utilitat i prestigi, és l'encarnació de l'ideal de Pere el Gran i Caterina II, que va ser heretat per la Rússia de la Il·lustració. Euler pot considerar-se un focus de connexió entre la ciència europea i Rússia, un dels actors principals en la transferència i difusió del coneixement que, per la seva

mobilitat, les seves xarxes professionals a tot Europa i la seva fama, va facilitar el moviment d'idees i especialment va ser essencial per al desenvolupament de l'anàlisi.

Euler va ser un creador de nocions i mètodes clau dins les matemàtiques pures i mixtes, encara que en molts casos el seu valor ha estat reconegut molts anys després de la seva mort. Efectivament, molts treballs matemàtics, sobretot d'anàlisi, desenvolupats en el segle XIX es van fonamentar en els resultats obtinguts anteriorment per Euler. Així, el 1950, el reconegut historiador de la matemàtica Carl B. Boyer afirmava en la seva ponència del Congrés Internacional de Matemàtics de Massachussets que l'obra *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748) d'Euler va ser el llibre més important pel desenvolupament de l'anàlisi de l'era moderna, equiparable amb el rol desenvolupat pels *Elements* d'Euclides en la geometria i amb el rol de l'obra de Mohamed Ben-Musa al-Khwarizmi en l'àlgebra.

Euler va ser un gran mestre i un magnífic divulgador. Quan exposava ho feia amb senzillesa i explicava el camí recorregut fent observacions sobre els intents tant si eren fructífers com si no ho eren. Així, per calcular  $B(3/2, 3/2)$  Euler raona com farà la demostració, més endavant mostra un camí amb el qual no troba la solució i també en raona els motius. Llegir Euler és aprendre, no únicament amb el desenvolupament dels seus resultats, sinó també en llegir les seves explicacions i raonaments quan el camí que emprèn no és profitós (Massa-Esteve, 2007). De fet, les seves obres actualment es troben accessibles en línia (vegeu referència); així doncs, el nostre millor suggeriment pot ser, seguint les paraules de Laplace: «Llegiu Euler, ell és el mestre de tots nosaltres».

## Referències

- [1] R. Calinger. «Leonhard Euler: The First St. Petersburg Years (1727-1741)». *Historia Mathematica* 23 (1996), 121–166.
- [2] R. Calinger. *Leonhard Euler: mathematical genius in the Enlightenment*. Princeton: Princeton University Press (2015).
- [3] G. Capobianco, M.R. Enea i G. Ferraro. «Geometry and Analysis in Euler's integral calculus». *Archive for History of Exact Sciences* 71 (2017), num. 1, 1–38.
- [4] M.J.A. Condorcet. «Éloge de M. Euler». A: *Histoire de l'Académie Royale des sciences pour l'année 1783*. Paris: Imprimerie Royale (1786), 37–68.
- [5] A. Delshams i M.R. Massa-Esteve. «Consideracions al voltant de la funció Beta a l'obra de Leonhard Euler (1707-1783)». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria* IX (2008), 59–82.
- [6] J. Dutka. «The Early History of the Factorial Function». *Archive for History of Exact Sciences* 43 (1991), num. 3, 225–249.
- [7] L. Euler. «De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt». (1730/31). A: *Opera Omnia*, sèrie 1, vol. XIV, 1–24. A *Comentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (1738), 5, 36–57, E019.
- [8] G. Ferraro. *The rise and the Development of the Theory of Series in the 18th and early 19th centuries*. Series: Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer (2007).
- [9] G. Ferraro. «Euler's Analytical Program». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria* XI (2010), 175–198.
- [10] C.G. Fraser. «The Calculus as Algebraic Analysis: Some Observations on Mathematical Analysis in the 18th Century». *Archive for History of Exact Sciences* 39 (1989), 317–335.
- [11] C.G. Fraser. «The origins of Euler's variational calculus». *Archive for History of Exact Sciences* 47 (1994), num. 2, 103–141.
- [12] M.D. Gordin. «The Importation of Being Earnest: The Early St. Petersburg Academy of Sciences». *Isis* 91 (2000), num. 1, 1–31.
- [13] I. Gouzévitch i D. Gouzévitch. «Introducing mathematics, building an empire: Russia under Peter I». A: Robson-Stedall (eds.), *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*. Nova York: Oxford University Press (2008), 353–373.

- [14] J. Gray. «Leonhard Euler: 1707-1783». *Janus-Revue Internationales de l'histoire des sciences, de la médecine, de la pharmacie et de la technique* LXXII (1-3) (1985), 171–192.
- [15] E. Knobloch. «Euler transgressing limits: The infinite and music theory». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria* IX (2008), 9-24.
- [16] M.R. Massa-Esteve. «Algebra and Geometry in Pietro Mengoli (1625–1686)». *Historia Mathematica* 33 (2006), 82–112.
- [17] M.R. Massa-Esteve. «Leonhard Euler (1707–1783): l'home, el creador i el mestre». *Mètode* 55 (2007), 35–38.
- [18] M.R. Massa-Esteve. «Sankt-Peterburgskaja Akademija Nauk ot Petra I do Ekateriny II:and Leonard Ejler». A: *Petro primo Catharina secunda; Dva monarha, dev epohi -preemstvennost', razvitie, reformy*. Evropejskij Dom (2017), 190–202.
- [19] M.R. Massa-Esteve. «The circulation of scientific knowledge in Euler's first stage at Saint Petersburg Academy of Sciences». A: F. d'Angelo (ed.), *The scientific dialogue linking America, Asia and Europe between the 12th and the 20th Century. Theories and techniques travelling in space and time*. Napoli: Viaggiatori (2018), 262–276.
- [20] M.R. Massa-Esteve i A. Delshams. «Euler's Beta integral in Pietro Mengoli's works». *Archive for History of Exact Sciences* 63 (2009), 325–356.
- [21] M.R. Massa-Esteve, A. Roca-Rosell i C. Puig-Pla. «Mixed mathematics in engineering education in Spain: Pedro Lucuce's course at the Barcelona Royal Military Academy of Mathematics in the eighteenth century». *Engineering Studies* 3 (2011), num. 3, 233–253.
- [22] L. Schulze. «The Russification of the St. Petersburg Academy of Sciences and Arts in the eighteenth century». *British Journal of History of Sciences* 18 (1985), 305–335.
- [23] A.P. Youschkevitch. «Leonhard Euler». A: C.C. Gillispie (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York: Scribner's 9 (1971–1991), 467–484.
- Les obres d'Euler en línia: <http://www.math.dartmouth.edu/~euler/> o bé The Euler Archive.

## Problemes

Juanjo Rué  
Universitat Politècnica de Catalunya

Torna a passar el període de bon temps i, sense adonar-nos-en, ja ens tornem a plantar enmig del fred. I no hi ha res millor per suportar el fred i la pluja que estar amb una xocolata calenta i un bon problema matemàtic per treballar! Aquí en presentem uns quants amb els quals creiem que, modestament, podem oferir una estona ben agradable de pensar i de treballar en allò que tant ens agrada a tots: les matemàtiques.

Passem, doncs, al material matemàtic. Comencem pels agraïments a tots els que han contribuït a aquesta entrega plantejant problemes de tota mena: a Miquel Amengual i a Joaquim Nadal (des de Cala Figuera i Llagostera, respectivament), tots dos amb problemes geomètrics molt interessants i entretinguts; a José Luis Díaz-Barrero, des de Barcelona, amb una de les seves desigualtats i, finalment, a Xavier Ros-Oton, des de Zuric. A la redacció en guardem uns quants més per a la propera... i no dubteu que qualsevol problema interessant serà més que benvingut en aquestes pàgines.



També volem donar les gràcies a tots els que ens han fet arribar solucions dels problemes proposats en el número anterior. El problema que ha ocupat més esforços ha estat, sense cap mena de dubte, el 149. Especialment en aquest hem rebut solucions de tota mena, tot i que la majoria no s'han restringit a la restricció «purament euclidians». A causa de l'extensa varietat de solucions rebudes, en aquesta ocasió publicarem la brillant, elegant i elemental solució del proponent, junt amb una solució d'Esteve Casas.

Abans d'acabar, volem fer el comentari habitual: per enviar qualsevol proposta (solucions, problemes a resoldre, comentaris, ...), dirigiu-vos a l'adreça de correu electrònic següent:

juan.jose.rue@upc.edu.

També, per tal de facilitar la feina a aquest humil escriptor, el material en  $\text{T}_\text{E}\text{X}$  o  $\text{L}\text{a}\text{T}_\text{E}\text{X}$  (i en especial les figures i dibuixos!) serà rebut amb molta més satisfacció d'esperit. Doncs res més... A treballar en els problemes proposats s'ha dit!

## Problemes proposats

**A153.** (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Sigui  $\triangle ABC$  un triangle amb  $\widehat{CAB} < 90^\circ$  i  $AB = AC$ . Sigui  $P$  un punt del costat  $BC$  tal que  $BP > PC$ . Denotem per  $D$  i  $E$  els respectius peus de les perpendiculars tirades de  $P$  a  $AB$  i  $CA$ .

Provau que  $[\triangle APD] > [\triangle APE]$ , on  $[\triangle XYZ]$  denota l'àrea del triangle  $\triangle XYZ$ .

**A154.** (Proposat per Xavier Ros-Oton, Universitat de Zuric, Zuric.)

Sigui  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  una successió de nombres reals positius. Demostreu que si la sèrie

$$\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0 + a_1} + \frac{a_n}{a_0 + \dots + a_{n-1}} + \dots$$

és convergent, aleshores la sèrie  $\sum_{n \geq 0} a_n$  també ho és.

**A155.** (Proposat per José-Luis Díaz Barrero, BarcelonaTech UPC, Barcelona.)

Siguin  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ,  $n$  nombres positius tals que  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ . Demostreu que

$$\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{(a_k - a_{k+1})^2}{a_k + a_{k+1}} + \sum_{k=1}^n (a_k a_{k+1})^{1/2} \leq 1.$$

(En aquesta fórmula els subíndexs es consideren mòdul  $n$ , i, per tant,  $a_{n+1} = a_1$ .)

**A156.** (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera.)

En el triangle  $\triangle ABC$ ,  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Sigui  $M$  el punt mig del segment  $AB$ . Sigui  $Z(X) = AX + XM$  on  $X$  és un punt del segment  $BC$ . Trobeu l'àrea i el perímetre del triangle  $\triangle ABC$  sabent que el mínim valor de  $Z(X)$  és 21 i que aquest mínim s'obté quan  $X$  és el peu de la bisectriu de l'angle  $\widehat{BAC}$ .

## Solucions

**A149.** (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Denotem per  $I$  l'incentre d'un triangle  $\triangle ABC$ . Demostreu, fent servir mètodes purament euclidians:

1. Si  $AI + BC = BI + CA = CI + AB$ , llavors  $\triangle ABC$  és equilàter.

2. Si  $\frac{AI}{BC} = \frac{BI}{CA} = \frac{CI}{AB}$ , llavors  $\triangle ABC$  és equilàter.

3. Si  $AI \cdot BC = BI \cdot CA = CI \cdot AB$ , llavors  $\triangle ABC$  és equilàter.

**Solució 1:** (Solució del proponent.)

Veguem cada punt per separat:

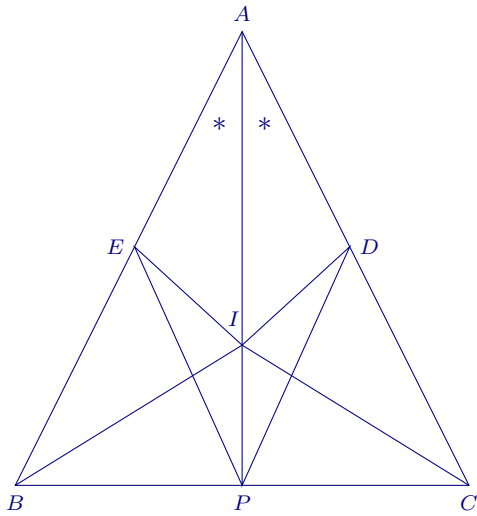
1. Suposem que  $BI + CA = CI + AB$ . Tindrem, de manera equivalent que

$$CA - CI = AB - BI. \quad (1)$$

Siguin  $D$  i  $E$  els respectius punts dels costats  $AC$  i  $AB$  del triangle  $\triangle ABC$  tals que  $CD =$

$CI$  i  $BE = BI$ . Aleshores,

$$AE = AB - BI = (\text{per (1)}) = CA - CI = AD.$$



Sigui ara  $P$  la intersecció de la recta que passa per  $A$  i  $I$  amb el costat  $BC$ . Ara, els parells de triangles  $(\triangle ADI, \triangle AEI)$  i  $(\triangle ADP, \triangle AEP)$  són iguals (via la relació costat-angle-costat) amb  $DI = EI$  i  $DP = EP$ . Conseqüentment,  $\triangle IPD$  i  $\triangle IPE$  són iguals (ara via la relació costat-costat-costat) amb  $\widehat{DIP} = \widehat{EIP}$ . Per tant, com que

$$\begin{aligned} \widehat{DIP} &= \widehat{CIP} + \widehat{DIC} \\ &= \underbrace{\left(\widehat{CAI} + \widehat{ICA}\right)}_{\text{teorema angle exterior}} + \underbrace{\left(90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{ICD}\right)}_{\substack{\triangle ICD \text{ és isòsceles} \\ \text{amb } CD = CI}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\widehat{BAC} + \frac{1}{2}\widehat{ACB}\right) + \left(90^\circ - \frac{1}{4}\widehat{ACB}\right) \\ &= 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{BAC} + \frac{1}{4}\widehat{ACB}. \end{aligned}$$

Anàlogament,

$$\widehat{EIP} = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{BAC} + \frac{1}{4}\widehat{ABC},$$

i, per tant,  $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$ . Anàlogament,  $\widehat{BCA} = \widehat{CAB}$ . És a dir,  $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \widehat{CAB}$ , i, per tant,  $\triangle ABC$  és equilàter.

2. La demostració és per contradicció: suposem  $AB > CA$ . Aleshores, serà  $BI > CI$ . Per tant,

$$\frac{AB}{CA} > 1 > \frac{CI}{BI}.$$

Així doncs,  $\frac{CI}{AB} < \frac{BI}{CA}$ , i hem arribat a contradicció.

A una contradicció anàloga s'arriba si suposem  $AB < CA$ . Llavors ha de ser  $AB = CA$ . Anàlogament,  $CA = BC$ . És a dir:

$$AB = BC = CA$$

i, per tant,  $\triangle ABC$  és equilàter.

3. Sigui novament  $P$  el punt obtingut de tallar el segment  $BC$  amb la recta que passa per  $A$  i per  $I$ . Atès que  $BI \cdot CA = CI \cdot AB$ , tindrem  $\frac{BI}{CI} = \frac{AB}{CA} = \frac{BP}{PC}$  i pel recíproc del teorema de la bisectriu interior en deduïm que  $\widehat{BIP} = \widehat{PIC}$ . En conseqüència,

$$\widehat{ABI} = \widehat{BIP} - \widehat{BAP} = \widehat{PIC} - \widehat{PAC} = \widehat{ICA}.$$

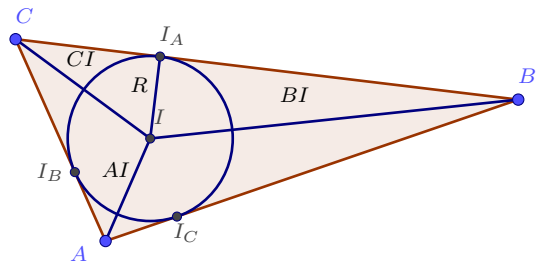
i

$$\widehat{ABC} = 2 \cdot \widehat{ABI} = 2 \cdot \widehat{ICA} = \widehat{ACB}.$$

Per tant,  $AB = CA$ . Anàlogament,  $CA = BC$ .

**Solució 2:** (Solució d'Esteve Casas, Sant Celoni.)

En primer lloc, presentem el dibuix sobre el qual es basaran els raonaments i les notacions. Hi denotem per  $I_A, I_B, I_C$  els punts de tangència de la circumferència inscrita al triangle  $\triangle ABC$ . Denotarem per  $R$  el radi de la circumferència inscrita.



Usarem també expressions del tipus  $BA^2$  per denotar el quadrat de la longitud del segment  $BA$ . Aleshores podem observar que es compleixen les relacions:

$$\begin{aligned}
AI_C &= AI_B, \\
BI_C &= BI_A, \\
CI_A &= CI_B, \\
AC &= AI_B + CI_B, \\
CB &= CI_A + BI_A, \\
AB &= AI_C + BI_C,
\end{aligned}$$

i, mitjançant el teorema de Pitàgores,

$$\begin{aligned}
AI^2 &= R^2 + AI_C^2, \\
BI^2 &= R^2 + BI_C^2, \\
CI^2 &= R^2 + CI_B^2.
\end{aligned}$$

Ara podem combinar (mitjançant la diferència) aquestes relacions per deduir-ne que

$$CI^2 - BI^2 = CI_B^2 - BI_C^2, \quad (*)$$

$$CI^2 - AI^2 = CI_B^2 - AI_C^2, \quad (**)$$

$$BI^2 - AI^2 = BI_C^2 - AI_C^2. \quad (***)$$

Analitzem ara cada un dels casos que ens demanen d'estudiar.

1. A més, tenim que es compleix que  $AI + BC = BI + CA = CI + AB$ . En aquesta situació la relació (\*) és

$$(CI - BI)(CI + BI) = (CI_B - BI_C)(CI_B + BI_C).$$

Usant ara que  $CI - BI = CA - AB$  i que  $CI_B + BI_C = CI_A + BI_A = BC$ , obtenim que la relació anterior és igual a la relació  $(CA - AB)(BI + CI)(CI_B - BI_C)(CB)$ . Finalment, com que  $CI_B - BI_C = CA - AB$ , conclouem que

$$(CA - AB)(BI + CI) = (CA - AB)CB.$$

Per tant, tret que el triangle sigui degenerat (i suposem que no ho és),  $CI + BI > CB$ ; per tant, ens cal que  $CA - AB = 0$ . Així doncs,  $CA = AB = CB$  que correspon al triangle equilàter.

2. Denotem per  $k$  al quocient  $\frac{AI}{BC} = \frac{BI}{CA} = \frac{CI}{AB}$ . Per tant

$$CI^2 = k^2 AB^2 = k^2 (AI_C + BI_C)^2,$$

$$BI^2 = k^2 CA^2 = k^2 (CI_B + BI_B)^2,$$

$$AI^2 = k^2 BC^2 = k^2 (AI_A + BI_A)^2.$$

En aquest cas, la relació (\*) es tradueix com a

$$k^2 (AI_C + BI_C)^2 - k^2 (AI_B + CI_B)^2 = CI_B^2 - BI_C^2,$$

que es pot reescriure de la forma

$$\begin{aligned}
&k^2 (BI_C - CI_B)(2AI_C + BI_C + CI_B) \\
&= (CI_B - BI_C)(CI_B + BI_C).
\end{aligned}$$

Observeu que l'última expressió representa una igualtat amb termes de signe contrari perquè hi ha  $BI_C - CI_B$  en una banda de la igualtat i  $CI_B - BI_C$  a l'altra. Per tant, l'única possibilitat que es compleixi és  $CI_B - BI_C = 0$  o  $CI_B = BI_C$ . Usant raonaments similars amb (\*\*) i (\*\*\*) tenim que  $CI_B = AI_C$  i  $BI_C = AI_C$ , i això implica que  $AC = AB = BC$ . És a dir, el triangle és equilàter.

3. Finalment, suposem que  $AI \cdot BC = BI \cdot CA = CI \cdot AB = k$  per un cert valor  $k$ . A partir d'aquí obtenim que

$$CI^2 = \frac{k^2}{AB^2}, \quad BI^2 = \frac{k^2}{AC^2}, \quad AI^2 = \frac{k^2}{CB^2}.$$

Per tant (\*) , en aquest cas s'expressa de la manera següent:

$$\begin{aligned}
k^2 \left[ \frac{1}{AB^2} - \frac{1}{CA^2} \right] &= k^2 \frac{CA^2 - AB^2}{AB^2 CA^2} \\
&= CI_B^2 - BI_C^2.
\end{aligned}$$

Així doncs,

$$\begin{aligned}
&k^2 \frac{(CA - AB)(CA + AB)}{AB^2 CA^2} \\
&= (CI_B - BI_C)(CI_B + BI_C) \\
&= (CA - AB)(CI_A + BI_A) \\
&= (CA - AB)CB,
\end{aligned}$$

i, per tant, si fos  $CA \neq AB$ ,

$$k^2 \frac{CA + AB}{AB^2 CA^2} = CB.$$

Novament, a partir de (\*\*) i (\*\*\*) , arribaríem a les expressions similars (si  $AB \neq CB$  i  $CA \neq CB$ ):

$$k^2 \frac{CB + AB}{AB^2 CB^2} = CA, \quad k^2 \frac{CA + CB}{CA^2 CB^2} = AB.$$

Tenim, doncs, la relació:

$$\begin{aligned} k^2(AB + CA)CB &= k^2(CB + AB)CA \\ &= k^2(CA + CB)AB \\ &= AB^2BC^2AC^2. \end{aligned}$$

Comparant, per exemple, els termes de la primera igualtat obtenim que  $(CA + AB)CB = (CB + AB)CA$ , d'on es pot deduir que necessàriament es compleix que  $CB = CA$ . De manera similar es dedueixen les igualtats dels altres costats, i, per tant, el triangle és equilàter.

**A150.** (Proposat per Xavier Ros-Oton, Universitat de Zuric, Zuric.)

Sigui  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ . Suposem que  $p$  té totes les arrels reals, i sigui  $a$  el màxim de totes elles. Proveu que per a tot  $x \geq a$  es compleix que

$$p'(x) \geq n [p(x)]^{\frac{n-1}{n}}.$$

**Solució:** (Solució de Francesc Fité, Institut d'Estudis Avançats, Princeton, Estats Units.)

Denotem per  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  les seves arrels (amb possible repetició de nombres si hi ha arrels múltiples) i ordenades en ordre decreixent (per tant,  $\alpha_1 = a$ ). Per començar, si  $x = a$  és clar que  $p'(a) \geq 0 = p(a)$ . Així doncs, suposem d'aquí en endavant que  $x > a$ .

Tenim aleshores que per tota  $x > a$  que  $p(x) > 0$  i

$$\begin{aligned} \frac{p'(x)}{p(x)} &= \frac{d}{dx} \log p(x) \\ &= \frac{d}{dx} [\log(x - \alpha_1) + \dots + \log(x - \alpha_n)] \\ &= \frac{1}{x - \alpha_1} + \dots + \frac{1}{x - \alpha_n} \\ &\geq n \sqrt[n]{\frac{1}{x - \alpha_1} \dots \frac{1}{x - \alpha_n}} \\ &= n \frac{1}{\sqrt[n]{p(x)}}, \end{aligned}$$

on hem usat la desigualtat entre la mitjana aritmètica i la geomètrica. Observeu també que en les derivades del logaritme no hi apareix el valor absolut atès que  $x > a$ , i, per tant, totes les fraccions són positives.

Finalment, podem multiplicar els dos costats de la desigualtat per  $p(x)$ , i finalment obtenim que

$$p'(x) \geq n \frac{p(x)}{\sqrt[n]{p(x)}}.$$

*Comentari a la solució:* noteu que la desigualtat es dona amb igualtat (usant la desigualtat aritmeticogeomètrica) si i només si  $p(x) = (x - a)^n$ .

**A151.** (Proposat per José-Luis Díaz Barrero, BarcelonaTech UPC, Barcelona.)

Sigui  $n$  un enter no negatiu. Demostreu que

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{\binom{n}{k} \frac{k - \sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{k(k+1)}} \frac{F_k}{F_{2n}}} \leq \sqrt[4]{\frac{n}{n+1}},$$

on  $F_n$  denota l' $n$ -èssim nombre de Fibonacci, definit per  $F_0 = 0, F_1 = 1$ , i per  $n \geq 2$ ,  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ .

**Solució:** (Solució de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.)

Farem la prova per inducció sobre  $n$ . Per  $n = 1$ , tant el terme de l'esquerra com el terme de la dreta de la desigualtat són iguals a  $2^{-1/4}$ . Per tant, la desigualtat és certa ja que és certa en particular la igualtat.

Suposem ara que  $n \geq 2$ , el terme de l'esquerra de la desigualtat és pot interpretar com el producte escalar de dos vectors en  $\mathbb{R}^n$  amb components (per  $k = 1$  fins a  $n$ )

$$\begin{aligned} &\sqrt{\binom{n}{k} \frac{F_k}{F_{2n}}} \text{ i } \sqrt{\frac{k - \sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{k(k+1)}}} \\ &= \sqrt{\frac{k}{\sqrt{k(k+1)}} - \frac{\sqrt{(k-1)(k+1)}}{\sqrt{k(k+1)}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{\frac{k}{k+1}} - \sqrt{\frac{k-1}{k}}}. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n \sqrt{\binom{n}{k} \frac{k - \sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{k(k+1)}} \frac{F_k}{F_{2n}}} \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{\binom{n}{k} \frac{F_k}{F_{2n}}} \sqrt{\sqrt{\frac{k}{k+1}} - \sqrt{\frac{k-1}{k}}} \end{aligned}$$



Aplicant ara la desigualtat de Cauchy-Schwartz a aquest sumatori obtenim (després de simplificar les arrels quadrades) que

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sqrt{\binom{n}{k} \frac{F_k}{F_{2n}}} \sqrt{\sqrt{\frac{k}{k+1}} - \sqrt{\frac{k-1}{k}}} \\ & \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{F_k}{F_{2n}}} \sqrt{\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{k+1}} - \sqrt{\frac{k-1}{k}}}. \end{aligned}$$

La suma que apareix en el segon factor se simplifica de manera trivial i obtenint  $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ . D'altra banda, es compleix la identitat entre nombres de Fibonacci  $F_{2n} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} F_k$ , que es pot demostrar directament usant l'expressió explícita  $F_r = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi_1^n - \phi_2^n)$ , on  $\phi_1$  i  $\phi_2$  són arrels del polinomi  $1 - x - x^2$  ( $\phi_1$  és l'arrel de mòdul més gran).

En resum, hem obtingut que

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{F_k}{F_{2n}}} \sqrt{\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{k+1}} - \sqrt{\frac{k-1}{k}}} = \\ & \sqrt{1} \sqrt[4]{\frac{n}{n+1}} = \sqrt[4]{\frac{n}{n+1}}, \end{aligned}$$

que és el que volíem demostrar.

*Comentari a la solució:* si  $n > 1$ , la desigualtat és de fet estricta. En efecte, usant que la desigualtat de Cauchy-Schwartz es dona amb igualtat si i només si els dos vectors considerats són proporcionals, podem deduir que la relació demanada es donarà amb igualtat si es compleix que per tot valor  $1 \leq k \leq n-1$

$$\frac{\sqrt{\sqrt{\frac{k}{k+1}} - \sqrt{\frac{k-1}{k}}}}{\sqrt{\binom{n}{k} \frac{F_k}{F_{2n}}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{\frac{k+1}{k+2}} - \sqrt{\frac{k}{k+1}}}}{\sqrt{\binom{n}{k+1} \frac{F_{k+1}}{F_{2n}}}}.$$

Fent ara  $k = 1$  en aquesta relació veiem que l'única tria vàlida per  $n$  per tal que es doni la igualtat és  $\frac{4}{\sqrt{3}} - 1$ , que evidentment no és un nombre enter.

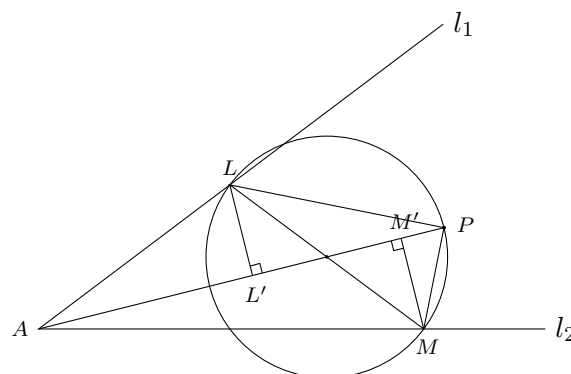
**A152.** (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal. Llagostera.)

Considerem dues rectes  $l_1$  i  $l_2$  que es tallen en el punt  $A$ , i sigui  $P$  un punt a l'interior de l'angle  $\hat{A}$ . Traceu pel punt  $P$  dues rectes  $r_1$  i  $r_2$  que formin entre si un angle recte, tal que  $r_1$  (resp.  $r_2$ ) talla  $l_1$  (resp.  $l_2$ ) en el punt  $L$  (resp.  $M$ ) amb la condició que els triangles  $\triangle APL$  i  $\triangle APM$  tinguin la mateixa àrea.

**Solució:** (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Comencem amb l'anàlisi de la configuració. Siguin  $L'$  i  $M'$  els peus de les perpendiculars a  $AP$  per  $L$  i  $M$ , respectivament. Aleshores,  $LL' \perp AP$  i  $MM' \perp AP$ . Per tant, els segments  $LL'$  i  $MM'$  són paral·lels.

Les àrees dels triangles  $\triangle APL$  i  $\triangle APM$  es poden expressar com  $\frac{1}{2}AP \cdot LL'$  i  $\frac{1}{2}AP \cdot MM'$ , respectivament. Si s'igualen aquestes dues expressions i es divideixen per  $\frac{1}{2}AP$  s'obté que, de fet,  $LL' = MM'$ .

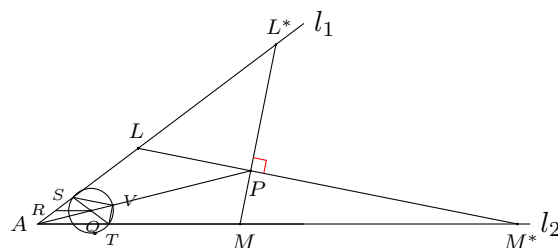


Se segueix, per tant, que el quadrilàter  $LL'MM'$  és un paral·lelogram (té dos costats iguals i paral·lels). Atès que les diagonals d'un paral·lelogram es bissequen mútuament, la recta que uneix els punts  $A$  i  $P$  passa pel punt mitjà del segment  $LM$ . I com que  $\angle LPM = 90^\circ$ , veiem que la circumferència de diàmetre  $LM$  passa per  $P$ .

Vista l'anàlisi podem passar a la construcció: escollim un punt  $Q$ , diferent de  $A$  i de  $P$ , que pertany a la semirecta  $AP$ . Sigui  $R$  el punt de  $l_1$  tal que el segment  $QR$  és paral·lel a  $l_2$  i  $S$  el punt simètric de  $A$  respecte de  $R$  en la recta  $l_1$ . Si considerem  $T$  el punt d'intersecció amb  $l_2$  de la recta  $QS$ , s'obté

$$\frac{SQ}{QT} = \frac{SR}{RA} = 1,$$

i d'aquí obtenim que  $SQ = QT$ . Tenint present que  $S$ ,  $Q$  i  $T$  estan alineats,  $Q$  és el punt mitjà del segment  $ST$ .



Finalment, si considerem  $V$  un dels punts d'intersecció amb  $AP$  de la circumferència de diàmetre  $ST$ , tindrem  $\widehat{SVT} = 90^\circ$  i les rectes

traçades pel punt  $P$  i paral·leles a  $SV$  i  $VT$  són dues rectes  $r_1$  i  $r_2$  que compleixen el que ens demanaven.

## Matemots

Xavier Gràcia

Universitat Politècnica de Catalunya

Recordeu que es tracta d'un joc de llengua (vegeu l'article introductor al número 33 de la *SCM/Notícies*). Cal resoldre els enigmes lingüístics següents, a partir de la definició donada i les pistes incloses.

Exemple: «Regions de l'espai que omplen la benzinera» (7 lletres). La resposta és «octants», que són les regions de l'espai determinades pels plans coordenats, i que sonen igual que els octans de la gasolina.

En cas de dubte podeu trobar-ne les respostes al peu de pàgina.<sup>3</sup>

1. Pot ser angle, devot del deure o tram de budell (5 lletres)
2. Els nombres preferits pels fotògrafs (8 lletres)
3. Pot ser pla, conjugat i també vitamínic (7 lletres)
4. És pròpia dels cossos, però també n'hi ha de futbol i d'infanteria (7 lletres)
5. En tenen els vectors, i també els circuits electrònics (10 lletres)
6. Calcula el volum de les obres completes de Lebesgue (6 lletres)
7. El ritme més apropiat per construir un polígon de 17 costats (6 lletres)
8. Compareixença en societat d'un grup d'algebristes (11 lletres)

## Tesis

- GEMMA COLLDEFORNS PAPIOL va llegir la seva tesi, dirigida per Luis Ortiz Gracia i Cornelis W. Oosterlee, titulada *Wavelet Approach in Computational Finance*, el dia 23 de febrer de 2018. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.



En el món de les finances computacionals, tant els preus de derivats com la gestió de riscos han atret molt d'interès entre els professionals i l'acadèmia. La tesi proporciona tècniques basades en ondetes a fi de millorar algunes de les metodologies utilitzades en aquestes àrees. Les ondetes són famílies de funcions que es poden traslladar i dilatar arbitràriament

generant bases ortogonals de  $L^2(\mathbb{R})$  a partir d'una funció  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ :

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

En relació amb elles, ha sorgit una col·lecció de mètodes d'inversió de Fourier que es basen

<sup>3</sup> Respostes als Matemots: 5. components; 8. presentació; 1. recte; 6. mesura; 2. mesura; 7. compàs; 3. complex; 4. ària.

en l'aproximació de funcions a partir de la projecció en la base d'ondetes, de tal manera que els coeficients de l'expansió s'expressen mitjançant la transformada de Fourier de la funció a aproximar.

El mètode SWIFT (*Shannon wavelet inverse Fourier technique*) per valorar opcions d'estil europeu en un subjacent s'ha publicat i presentat recentment com una tècnica precisa, robusta i altament eficient basada en les ondes de Shannon. Motivats per la valoració d'un tipus d'opcions exòtiques anomenades «opcions arc iris», que depenen de diversos actius, un dels objectius de la tesi és l'extensió multidimensional del mètode SWIFT [1]. Gràcies a la naturalesa de les ondes de Shannon, no és necessari un truncament a priori del rang d'integració, es té una estimació de l'error i es fa ús d'algorismes de la transformada ràpida de Fourier per accelerar els càlculs.

En l'àmbit de gestió de risc, són els reguladors els que s'encarreguen de determinar la quantitat de capital que les entitats financeres han de guardar per estar preparades per suportar pèrdues inesperades. És l'anomenat «comitè de Basilea» el que s'encarrega dels reguladors bancaris mundials. Recentment, el comitè ha revisat els estàndards establerts pel capital mínim per risc de mercat i, entre altres canvis, suggereix, d'una banda, moure l'ús estàndard de la mesura de risc VaR cap a la mesura ES, i, l'altra banda, considerar la incorporació del risc derivat a causa de la no-liquiditat del mercat. És per això que un segon objectiu de la tesi és presentar un nou mètode numèric basat en

SWIFT per als càlculs del VaR i l'ES amb un horitzó de temps estocàstic per tenir en compte els problemes de liquiditat del mercat [2].

El risc de crèdit és el risc de pèrdues per part del deutor en cas que no compleixi els acords i en general és la principal font de risc en un banc comercial. En la tesi, s'investiga el problema de calcular les mesures de risc de crèdit de les carteres sota els models multifactorials gaussians i de  $t$ -còpula. És ben sabut que els mètodes de Montecarlo, que són els que generalment s'empren, són molt exigents des del punt de vista computacional en aquestes situacions. Per millorar aquests problemes, en la tesi es presenten tècniques numèriques eficients i robustes basades en les ondes de Haar per recuperar la funció de distribució acumulada de la variable de pèrdues a partir de la seva funció característica [3].

## Referències

- [1] G. Colldeforns-Papiol, L. Ortiz-Gracia i C.W. Oosterlee, «Two-dimensional Shannon wavelet inverse Fourier technique for pricing European options». *Appl. Numer. Math.* **117** (2017), 115–138.
- [2] G. Colldeforns-Papiol i L. Ortiz-Gracia, «Computation of market risk measures with stochastic liquidity horizon». *J. Comput. Appl. Math.* **342** (2018), 431–450.
- [3] G. Colldeforns-Papiol, L. Ortiz-Gracia i C.W. Oosterlee, «Quantifying credit portfolio losses under multi-factor models». *Int. J. Comput. Math.* **0** (2018), 1–22.

- ALBERTO DEBERNARDI PINOS va llegir la seva tesi, dirigida per Sergey Tikhonov, titulada *Convergència i integrabilitat de transformades de Fourier*, el dia 12 de març de 2018. La tesi correspon al Centre de Recerca Matemàtica i al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.



En aquesta tesi principalment s'estudien dos problemes de les transformades integrals

$$Tf(y) = \int_0^{\infty} K(x, y)f(x) dx, \quad y \in (0, \infty),$$

on  $K$  és un nucli de tipus Fourier: la convergència uniforme i la seva integrabilitat. En

gran part de la tesi una de les hipòtesis centrals és la de monotonia general.

Les funcions monòtones generals [11, 13] definides a  $(0, \infty)$  són aquelles funcions localment integrables i localment de variació afitada per a

les quals existeixen constants  $C, \lambda > 1$  tals que

$$\int_x^{2x} |f'(t)| dt \leq C \int_{x/\lambda}^{\lambda x} \frac{|f(t)|}{t} dt,$$

per a tot  $x > 0$  (aquesta definició es pot estendre de diverses maneres a subconjunts de  $\mathbb{R}^n$ , i inclús generalitzar a  $(0, \infty)$ , tal com es fa a [5, 7]). La motivació darrere la condició de monotonia general és que les funcions monòtones (decreixents) satisfan les desigualtats

$$\int_x^{2x} |f'(t)| dt \leq f(x) \leq 2 \int_{x/2}^x \frac{|f(t)|}{t} dt,$$

amb la qual cosa es pot esperar que les funcions monòtones generals puguin reemplaçar les funcions decreixents en una gran quantitat de resultats. De fet, aquesta generalització comprèn una varietat de funcions molt més àmplia que només les funcions decreixents. Per exemple, qualsevol funció  $f(x) = x^\gamma$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ , és monòtona general. Una altra observació interessant és que en la definició estem considerant implícitament funcions a valors complexos, mentre que les funcions decreixents són típicament positives.

Donada una transformada  $T$  és important tenir eines per decidir si les integrals parcials  $T_N f(y) = \int_0^N K(x, y) f(x) dx$  convergeixen de manera uniforme cap a la funció  $Tf(y)$ , ja que en cas afirmatiu, aquesta última funció conservaria propietats desitjables de les funcions  $T_N f(y)$ , com ara la continuïtat o la integrabilitat. A més, el fet que a les transformades de tipus Fourier els nuclis  $K(x, y)$  són típicament oscil·latoris fa que en el cas general sigui més aviat difícil donar condicions suficients per a la convergència uniforme de  $T_N f(y)$ , a part de les condicions trivials. Per exemple, en el cas general la transformada del sinus

$$\int_0^\infty f(x) \sin xy dx$$

convergeix uniformement si  $f \in L^1(1, \infty)$  i  $xf(x) \in L^1(0, 1)$ , però la condició  $f \in L^1(1, \infty)$  és massa restrictiva (i, de fet, és una condició suficient trivial). En canvi, si suposem que  $f$  és monòtona general (seguint la idea de [1] per a sèries de Fourier amb coeficients decreixents), aquesta hipòtesi pot ser relaxada tal com es fa a [7], on es demostra que la condició  $f \in L^1(1, \infty)$  es pot substituir per  $xf(x) \rightarrow 0$  quan

$x \rightarrow \infty$ , cosa que en general no és certa. De fet, en el cas de funcions monòtones generals la condició  $xf(x) \rightarrow 0$  quan  $x \rightarrow \infty$  és més feble que  $f \in L^1(1, \infty)$ .

Una altra família de transformades per a les quals hem obtingut condicions necessàries i suficients per a la seva convergència uniforme són les transformades de Hankel amb pesos potencials [2, 4, 6]

$$\mathcal{L}_{\mu, \nu}^\alpha f(r) = r^\mu \int_0^\infty (rx)^\nu f(x) j_\alpha(rx) dx,$$

on  $j_\alpha$  és la funció de Bessel normalitzada d'ordre  $\alpha \geq -1/2$ . L'interès en l'estudi d'aquesta família de transformades resideix en el fet que moltes transformades clàssiques es poden representar mitjançant un operador  $\mathcal{L}_{\mu, \nu}^\alpha f(r)$ , com ara la transformada del sinus o cosinus, o la transformada de Fourier de funcions radials en  $\mathbb{R}^n$ .

Finalment, s'estudien desigualtats de normes [8]

$$\|Tf\|_{L^q(u)} \leq C \|f\|_{L^p(v)} \quad (2)$$

en espais de Lebesgue amb pesos  $L^p(v)$ ,  $L^q(u)$ , on la constant  $C$  és independent de  $f$ . Concretament, per a les transformades de tipus Fourier [10] trobem condicions necessàries o suficients en els pesos  $u$  i  $v$  per tal que la desigualtat (2) es compleixi per a tota  $f \in L^p(v)$ , mitjançant les desigualtats de Hardy. Per a funcions monòtones generals les condicions que garanteixen (2) es poden relaxar, i, de fet, utilitzant la mateixa tècnica que a [6], que consta en trobar fites superiors per a la funció primitiva del nucli  $K(x, y)$  (com a funció de  $x$ , i amb constant additiva nul·la), es troben les condicions necessàries i suficients per tal que la desigualtat (2) es compleixi quan  $u$  i  $v$  són pesos potencials, i així s'unifiquen així els resultats de diversos articles, com ara [3, 9], i [12], i se'n troben de nous per a transformades amb nuclis oscil·latoris.

## Referències

- [1] T. W. Chaundy i A. E. Jolliffe, «The uniform convergence of a certain class of trigonometrical series». *Proc. London Math. Soc.* S2-15 (1916), núm. 1, 214–216.



- [2] L. De Carli, «On the  $L^p$ - $L^q$  norm of the Hankel transform and related operators». *J. Math. Anal. Appl.* 348 (2008), 366–382.
- [3] L. De Carli, D. Gorbachev i S. Tikhonov, «Pitt and Boas inequalities for Fourier and Hankel transforms». *J. Math. Anal. Appl.* 408 (2013), núm. 2, 762–774.
- [4] A. Debernardi, «Hankel transforms of general monotone functions», acceptat.
- [5] A. Debernardi, «Uniform convergence of double sine transforms of general monotone functions». *Anal. Math.* 43 (2017), núm. 2, 193–217.
- [6] A. Debernardi, «Uniform convergence of Hankel transforms». *J. Math. Anal. Appl.* 468 (2018), núm. 2, 1179–1206.
- [7] A. Debernardi, «Uniform convergence of sine integrals with general monotone functions». *Math. Nachr.* 290 (2017), núm. 17-18, 2815–2825.
- [8] A. Debernardi, «Weighted norm inequalities for generalized Fourier-type transforms and applications». enviat.
- [9] D. Gorbachev, E. Lifyand i S. Tikhonov, «Weighted Fourier inequalities: Boas’ conjecture in  $\mathbb{R}^n$ ». *J. Anal. Math.* 114 (2011), 99–120.
- [10] D. Gorbachev, E. Lifyand i S. Tikhonov, «Weighted Pitt inequalities for integral transforms», acceptat a Indiana Univ. Math., preimpressió a <https://pdfs.semanticscholar.org/e419/69b76bc7a287fbab6c0fa0d48f64d2377dfa.pdf>.
- [11] E. Lifyand i S. Tikhonov, «A concept of general monotonicity and applications». *Math. Nachr.* 284 (2011), núm. 8-9, 1083–1098.
- [12] E. Lifyand i S. Tikhonov, «Extended solution of Boas’ conjecture on Fourier transforms». *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 346 (2008), núm. 21-22, 1137–1142.
- [13] S. Tikhonov, «Trigonometric series with general monotone coefficients». *J. Math. Anal. Appl.* 326 (2007), 721–735.

- CARLES BARRIL BASIL va llegir la seva tesi, dirigida per Àngel Calsina Ballesta, titulada *Semilinear hyperbolic equations and the dynamics of gut bacteria*, el dia 13 de juny de 2018. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.



El problema que es tracta en aquesta tesi sorgeix d’una sèrie d’experiments realitzats per la Montserrat Llagostera i el seu equip de la Universitat Autònoma de Barcelona. Estudien l’ús de bacteriòfags per tractar la salmonel·la en pollets [2] i, en aquest sentit, estan especialment interessades a determinar com la salmonel·la es propaga i persisteix en una població donada, i com els bacteriòfags poden afectar aquests processos. Una de les qüestions que els preocupava especialment era l’efecte que tenia la contaminació del medi amb bacteris excretats pels pollets infectats.

Per abordar aquesta qüestió vam partir d’un model en el qual es considera la dinàmica dels bacteris tant al medi com al llarg de l’intestí dels animals. A més a més, s’assumeix

també que els bacteris de l’intestí poden trobar-se en dos estats diferents: com a partícules lliures o com a partícules adherides a l’epiteli, de manera que les primeres es veuran afectades pel flux intestinal i les segones no. Matemàticament, les condicions anteriors per una població de  $n$  animals queden reflectides en el sistema d’equacions següent:

$$\begin{cases} \partial_t u_h = \gamma_1^h(u_h)u_h + \alpha_h v_h - \delta_h u_h \\ \partial_t v_h = -c_h \partial_x v_h + \gamma_2^h(v_h)v_h - \alpha_h v_h + \delta_h u_h \\ \dot{r} = \sum_{h \in H} (c_h v_h(l_h, t) - \lambda_h r) - \mu r \\ c_h v_h(0, t) = \lambda_h r, \end{cases}$$

on  $h \in \{1, \dots, n\}$  és un índex per als diferents hostes. Les variables dependents són, d’una

banda,  $u_h(x, t)$  i  $v_h(x, t)$  que representen, respectivament, els bacteris adherits i lliures que es troben a la posició  $x$  de l'hoste  $h$  a l'instant  $t$ , i, de l'altra,  $r(t)$  que és la concentració de bacteris al medi a l'instant  $t$ . La resta de paràmetres de cada hoste  $h$  són: la longitud de l'intestí  $l_h$ , la velocitat del flux intestinal  $c_h$ , les taxes d'adhesió  $\alpha_h$  i de despreniment  $\delta_h$  per càpita, la taxa d'ingestió  $\lambda_h$  i les funcions  $\gamma_1^h$  i  $\gamma_2^h$  que donen les taxes de creixement per càpita segons la fase en la qual es trobi el bacteri, que assumim que són diferenciables. Finalment, el paràmetre  $\mu$  indica la taxa de degradació dels bacteris que es troben al medi. Observem que la condició de frontera indica que la densitat de bacteris a l'inici de l'intestí ve donada per la quantitat de bacteris que l'animal ha ingerit del medi.

Per determinar si el problema està ben plantejat, és a dir, si per cada condició inicial de les variables dependents hi ha una i només una trajectòria que satisfà les equacions en «algun sentit» i que, a més a més, les trajectòries es comporten de manera contínua respecte a les condicions inicials, utilitzem la teoria de semigrups i, en particular, la formulació semilineal [3]. En concret, reescrivim el problema de valor inicial associat al sistema anterior en la forma:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = A_T x(t) + \mathcal{H}(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in X, \end{cases}$$

on  $X$  és un espai de Banach apropiat on prenen valors les variables dependents. L'operador  $A_T$ , que és lineal però no necessàriament continu, és el generador d'un semigrup  $T$  fortament continu en  $X$ . En canvi, la pertorbació  $\mathcal{H}$  és no lineal però més regular: Lipschitz si es vol provar existència i unicitat de solucions, diferenciable si es vol provar el principi d'estabilitat lineal.

Quan s'intenta reescriure el problema d'aquesta forma, ens trobem amb algun obstacle que ens impedeix aplicar la formulació semilineal. En efecte, si prenem  $X$  com l'espai de

funcions integrables aleshores la pertorbació  $\mathcal{H}$  no és diferenciable en general, de manera que no podem analitzar l'estabilitat d'equilibris utilitzant el principi d'estabilitat lineal. Si, en canvi, prenem  $X$  com l'espai de funcions contínues que satisfan la condició de frontera, aleshores la pertorbació  $\mathcal{H}$  sí que és diferenciable però el seu recorregut se «surt» de l'espai  $X$ , de manera que no és possible aplicar la formulació semilineal. Per resoldre aquest inconvenient hem utilitzat una generalització de la teoria semilineal desenvolupada a [4, 5] en la qual s'admeten pertorbacions  $\mathcal{H}$  que donen valors a certa extensió de  $X$  determinada pel semigrup  $T$ .

## Referències

- [1] J. Cerdà, J. Martín i P. Silvestre, «Capacitary function spaces». *Collectanea Math.* 62 (2011), núm. 1, 95–118.
- [2] J. Colom, M. Cano-Sarabia, J. Otero, P. Cortés, D. MasPOCH i M. Llagostera. «Liposome-Encapsulated Bacteriophages for Enhanced Oral Phage Therapy against Salmonella spp.». *Applied and Environmental Microbiology*, 81 (2015), núm. 14, 4841–4849.
- [3] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, (1983).
- [4] Ph Clément, O. Diekmann, M. Gyllenberg, H.J. a. M. Heijmans i H.R. Thieme. «Perturbation theory for dual semigroups». *Mathematische Annalen*, 277 (1987), núm 4, 709–725.
- [5] Ph. Clément, O. Diekmann, M. Gyllenberg, H. Heijmans i H. R. Thieme. «Perturbation theory for dual semigroups. III. Nonlinear Lipschitz continuous perturbations in the sun-reflexive case». *Pitman Research Notes in Mathematics*, (1989).

- JORDI DELGADO RODRÍGUEZ va llegir la seva tesi, dirigida per Enric Ventura Capell, titulada *Extensions of free groups: algebraic, geometric, and algorithmic aspects*, el dia 15 de setembre de 2017. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Politècnica de Catalunya.



En aquest treball s'usen tècniques geomètriques per estudiar certes extensions naturals dels grups lliures i resoldre diversos problemes algorísmics sobre elles.

A aquest efecte, es considera la família de grups lliure-abelians per lliure ( $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{F}_n$ ) com a punt de partida per trobar generalitzacions en dues direccions principals: productes semidirectes, i grups parcialment commutatius (PC-groups).

Els quatre projectes constituents d'aquesta tesi es descriuen a continuació.

**Productes directes de grups lliure-abelians per lliure** [1, 2]. Comencem estudiant l'estructura dels grups  $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{F}_n$ , amb especial èmfasi en el seu reticle de subgrups i el seu monoide d'endomorfismes, per als quals dona una descripció explícita i es caracteritzen tant la injectivitat com l'exhaustivitat.

A continuació, es parteix dels resultats obtinguts per atacar diversos problemes algorísmics involucrant tant subgrups com endomorfismes de  $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{F}_n$ . En concret, es demostra la resolubilitat algorísmica del problema de la pertinença de subgrups (MP), el problema de l'índex finit (FIP), el problema de la intersecció de subgrups (SIP), el problema de la intersecció de classes laterals (CIP), el problema dels punts fixos (FPP), els problemes de Whitehead (WhP) i el problema de la conjugació torçada (TCP), per a aquesta família de grups.

**Reconeixement algorísmic d'extensions cíclics** [3]. A la primera part, es demostra la indecidibilitat algorísmica de diverses propietats (com ara generabilitat finita, presentabilitat finita, abelianitat, finitud, llibertat i trivialitat) del grup base de les extensions cíclics finitament presentades. En particular, veiem que no és possible decidir algorísmicament si una extensió finitament presentada  $G \rtimes \mathbb{Z}$  admet un grup base finitament generat. Aquest últim resultat ens permet demostrar també

la indecidibilitat algorísmica de l'invariant de Bieri-Neumann-Strebel (BNS), un important invariant geomètric històricament considerat «molt difícil de calcular en general».

A la segona part, es demostra l'equivalència entre el problema de l'isomorfisme (IP) dins de la subclasse de  $\mathbb{Z}$ -extensions úniques, i el problema de la semiconjugació ( $\frac{1}{2}$ CP) per a cert tipus d'automorfismes exteriors, que caracteritzem algorísmicament.

**Autòmats de Stallings per a grups lliure-abelians per lliure** [4]. Després de recrear en un llenguatge purament algorísmic la teoria clàssica de Stallings associant un autòmat a cada subgrup del grup lliure  $\mathbb{F}_n$ , estenem aquesta teoria a productes semidirectes de la forma  $\mathbb{Z}^m \rtimes \mathbb{F}_n$ . Concretament, associem un autòmat (enriquit amb vectors de  $\mathbb{Z}^m$ ) a cada subgrup de  $\mathbb{Z}^m \rtimes \mathbb{F}_n$  i demostrem que en el cas de subgrups finitament generats aquesta construcció és algorísmica i permet resoldre el problema de la pertinença (MP) dins d'aquesta família de grups.

La descripció geomètrica obtinguda mostra, a més (fins i tot en el cas de productes directes), no només que la intersecció de subgrups finitament generats pot ser infinitament generada, sinó que, també quan és finitament generada, no es pot afitar el rang de la intersecció en termes dels rangs dels subgrups intersecats. Aquest fet és rellevant perquè denega qualsevol possible extensió de la cèlebre (i recentment provada) conjectura de Hanna Neumann en aquest àmbit.

**Problemes de la intersecció per a grups de Droms** [5, 6]. Després de caracteritzar els grups parcialment commutatius (PC-groups) que satisfan la propietat de Howson [5], combinem la versió algorísmica del teorema dels subgrups de Kurosh donada per S.V. Ivanov, amb idees del nostre treball a [1] sobre  $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{F}_n$ , per demostrar la resolubilitat del problema de la intersecció de subgrups (SIP), el problema

de la intersecció de classes laterals (CIP), i altres problemes afins, dins la subfamília de PC-groups de Droms (com ara aquells PC-groups en que tots els subgrups són de nou parcialment commutatius).

## Referències

- [1] J. Delgado i E. Ventura, «Algorithmic problems for free-abelian times free groups». *Journal of Algebra*. 391 (2013), 256–283.
- [2] J. Delgado, «Whitehead Problems for Words in free times free-abelian groups», *Extended Abstracts Fall 2012*, ser. Trends in Mathematics, J. González-Meneses, M. Lustig, and E. Ventura, Eds. Springer International Publishing, Jan. 2014, 35–38.
- [3] B. Cavallo, J. Delgado, D. Kahrobaei i E. Ventura, «Algorithmic recognition of infinite cyclic extensions». *Journal of Pure and Applied Algebra* 221 (2017), núm. 9, 2157–2179.
- [4] J. Delgado i E. Ventura, «Stallings automata for free-abelian by free groups» (en premsa), 2017.
- [5] J. Delgado, «Some characterizations of Howson PC-groups». *Reports@SCM* 1 (2014), núm. 1, 33–38.
- [6] J. Delgado, E. Ventura i A. Zakharov, «Intersection problem for Droms RAAGs». *International Journal of Algebra and Computation*, Jul. 2018.





# Experiències: ma+emà+iques

## PROHIBIT NO TOCAR

Des de febrer de 2014, l'Ajuntament de Cornellà ha cedit al **mmaca** la segona planta del Palau Mercader per instal·lar-hi una exposició permanent.

Disposem de 400 m<sup>2</sup> amb sales dedicades a geometria, combinatòria, càlcul, estadística, miralls, l'esfera de la Terra i un espai dedicat especialment als primers cursos de Primària.

Aprofitant el magnífic entorn del Parc, organitzem jornades singulars a l'exterior: Aniversari (febrer), Dia Pi (març), Dia escolar de les matemàtiques (maig), Dia de Martin Gardner (octubre).

La majoria dels materials del **mmaca** estan dissenyats i fets a mà per nosaltres. Utilitzem materials senzills: fusta, cordes, teles, vidre, plàstic.

Regularment programem conferències i altres activitats divulgatives.

**Us convidem a visitar-nos!**  
**Us quedareu més temps del que havíeu previst!**

**Museu de Matemàtiques de Catalunya**  
Palau Mercader - Parc Can Mercader  
Carretera de L'Hospitalet, s/n.  
08940 Cornellà de Llobregat

Gavarrà

**mmaca**  
PARC CAN MERCADER

CARRETERA DE L'HOSPITALET  
 L12, L52, L82

Almeda  
 L8

R5	R6	R50
R60	S8	S33

**Entrada gratuïta**  
Dimecres de 17 a 20h  
Diumenge de 10 a 14h

**Grups amb reserva prèvia**  
Matins de dilluns a divendres  
Dilluns i dimecres a la tarda

**Tallers per a famílies**  
Diumenge de 10 a 11h

reserves.cornella@mmaca.cat  
tel. 665233448 (de 10 a 13h)

**www.mmaca.cat**  
 @mmaca\_cat mmaca.cat

El **mmaca** es troba en un punt molt important de la seva història. Durant els 10 anys de recorregut, hem treballat molt i el projecte ha crescut amb força. L'objectiu d'apropar les matemàtiques a la societat s'està complint i tenim el reconeixement generalitzat de tots els que ens coneixen.

Ara necessitem saber amb qui podem comptar per a poder afrontar els reptes futurs i continuar oferint activitats arreu del territori: **necessitem persones.**

Però no ens n'amagarem: també **necessitem diners.** Afortunadament, les donacions fetes en favor del **mmaca** gaudeixen d'avantatges fiscals interesantíssims de fins al 75% de desgravació en l'IRPF.

Ara més que mai **necessitem els nostres amics a la vora!**

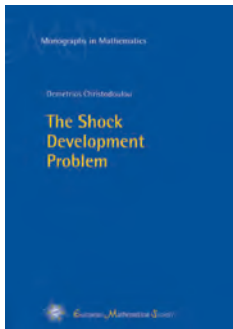
Si vols fer-nos costat, ens ho pots fer saber escrivint a [mecenes@mmaca.cat](mailto:mecenes@mmaca.cat)





## New books published by the European Mathematical Society

Individual members of the EMS, member societies or societies with a reciprocity agreement (such as the American, Australian and Canadian Mathematical Societies) are entitled to a discount of 20% on any book purchases, if ordered directly at the EMS Publishing House.



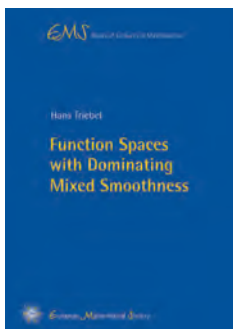
Demetrios Christodoulou (ETH Zürich, Switzerland)

**The Shock Development Problem** (EMS Monographs in Mathematics)

ISBN 978-3-03719-192-7. 2019. 932 pages. Hardcover. 16.5 x 23.5 cm. 128.00 Euro

This monograph addresses the problem of the development of shocks in the context of the Eulerian equations of the mechanics of compressible fluids. The mathematical problem is that of an initial-boundary value problem for a nonlinear hyperbolic system of partial differential equations with a free boundary and singular initial conditions.

The free boundary is the shock hypersurface and the boundary conditions are jump conditions relative to a prior solution, conditions following from the integral form of the mass, momentum and energy conservation laws. The prior solution is provided by the author's previous work which studies the maximal classical development of smooth initial data. New geometric and analytic methods are introduced to solve the problem. Geometry enters as the acoustical structure, a Lorentzian metric structure defined on the spacetime manifold by the fluid. This acoustical structure interacts with the background spacetime structure. Reformulating the equations as two coupled first order systems, the characteristic system, which is fully nonlinear, and the wave system, which is quasilinear, a complete regularization of the problem is achieved.



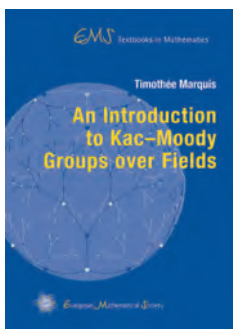
Hans Triebel (University of Jena, Germany)

**Function Spaces with Dominating Mixed Smoothness** (EMS Series of Lectures in Mathematics)

ISBN 978-3-03719-195-8. 2019. 210 pages. Softcover. 17 x 24 cm. 36.00 Euro

The first part of this book is devoted to function spaces in Euclidean  $n$ -space with dominating mixed smoothness. Some new properties are derived and applied in the second part where weighted spaces with dominating mixed smoothness in arbitrary bounded domains in Euclidean  $n$ -space are introduced and studied. This includes wavelet frames, numerical integration and discrepancy, measuring the deviation of sets of points from uniformity.

These notes are addressed to graduate students and mathematicians having a working knowledge of basic elements of the theory of function spaces, especially of Besov–Sobolev type. In particular, it will be of interest for researchers dealing with approximation theory, numerical integration and discrepancy.



Timothée Marquis (Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium)

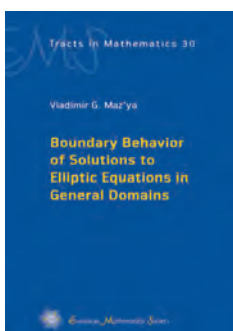
**An Introduction to Kac–Moody Groups over Fields** (EMS Textbooks in Mathematics)

ISBN 978-3-03719-187-3. 2018. 343 pages. Hardcover. 16.5 x 23.5 cm. 48.00 Euro

The interest for Kac–Moody algebras and groups has grown exponentially in the past decades, both in the mathematical and physics communities, and with it also the need for an introductory textbook on the topic. The aims of this book are twofold:

- to offer an accessible, reader-friendly and self-contained introduction to Kac–Moody algebras and groups;
- to clean the foundations and to provide a unified treatment of the theory.

The book starts with an outline of the classical Lie theory, used to set the scene. Part II provides a self-contained introduction to Kac–Moody algebras. The heart of the book is Part III, which develops an intuitive approach to the construction and fundamental properties of Kac–Moody groups. It is complemented by two appendices, respectively offering introductions to affine group schemes and to the theory of buildings. Many exercises are included, accompanying the readers throughout their journey. The book assumes only a minimal background in linear algebra and basic topology, and is addressed to anyone interested in learning about Kac–Moody algebras and/or groups, from graduate (master) students to specialists.



Vladimir Maz'ya (Linköping University, Sweden and University of Liverpool, UK)

**Boundary Behavior of Solutions to Elliptic Equations in General Domains** (EMS Tracts in Mathematics)

ISBN 978-3-03719-190-3. 2018. 441 pages. Hardcover. 17 x 24 cm. 78.00 Euro

The present book is a detailed exposition of the author and his collaborators' work on boundedness, continuity, and differentiability properties of solutions to elliptic equations in general domains, that is, in domains that are not a priori restricted by assumptions such as "piecewise smoothness" or being a "Lipschitz graph". The description of the boundary behavior of such solutions is one of the most difficult problems in the theory of partial differential equations. After the famous Wiener test, the main contributions to this area were made by the author. In particular, necessary and sufficient conditions for the validity of imbedding theorems are given, which provide criteria for the unique solvability of boundary value problems of second and higher order elliptic equations. Another striking result is a test for the regularity of a boundary point for polyharmonic equations.

The book will be interesting and useful for a wide audience. It is intended for specialists and graduate students working in the theory of partial differential equations.



# SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES

## Filial de l'Institut d'Estudis Catalans

Carrer del Carme, 47, 08001 Barcelona

c/e: scm@iecat.net Adreça web: <http://www.iecat.net/scm>

### Sol·licitud d'inscripció com a soci de la SCM o actualització de dades

(cal imprimir-a, omplir-la, signar-la i enviar-la a la SCM per correu electrònic, fax o correu ordinari)

Tipus de soci:  Ordinari  Estudiant\*  Institució

En reciprocitat. Sóc soci de \_\_\_\_\_  
(Al web trobareu la llista de societats amb les quals la SCM té acords de reciprocitat.)

Nom i cognoms: \_\_\_\_\_  
o institució

Adreça: \_\_\_\_\_ Codi postal: \_\_\_\_\_

Població: \_\_\_\_\_ NIF: \_\_\_\_\_

Correu electrònic: \_\_\_\_\_ Telèfon: \_\_\_\_\_ Fax: \_\_\_\_\_

Lloc d'estudi o de treball: \_\_\_\_\_

### Dades per a la domiciliació bancària

Qui signa aquest document autoritza que anualment es faci efectiu el rebut de soci de la Societat Catalana de Matemàtiques a nom de \_\_\_\_\_

a la llibreta d'estalvi / el compte / la targeta de crèdit que s'indica seguidament:

Titular del compte o targeta : \_\_\_\_\_

Entitat bancària: \_\_\_\_\_

Adreça de l'oficina: \_\_\_\_\_

Codi de l'entitat, oficina i dígits de control: \_\_\_\_\_

Número del compte o llibreta: \_\_\_\_\_

Targeta de crèdit: \_\_\_\_\_ Caducitat: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_ NIF: \_\_\_\_\_

Signat: \_\_\_\_\_

### Signatura

Envieu la butlleta d'inscripció i l'ordre de domiciliació, que trobareu al web de la SCM, <http://blogs.iec.cat/scm/la-societat/fes-ten-soci/>, per correu postal o correu electrònic, emplenada i signada.

Les quotes per a l'any 2018 són les següents: 40 euros socis ordinaris, 20 euros socis estudiants i membres de societats amb conveni de reciprocitat i 80 euros institucions.

Us informem que les vostres dades seran incorporades a un fitxer que és responsabilitat de l'Institut d'Estudis Catalans (IEC) amb la finalitat de gestionar l'activitat a la qual us inscriviu. Les vostres dades no seran cedides a tercers, i un cop finalitzada l'activitat es conservaran als efectes de registre històric. Podeu exercir els drets d'accés, rectificació, supressió, oposició, limitació en el tractament i portabilitat, adreçant-vos per escrit a l'Institut d'Estudis Catalans (carrer del Carme, 47, 08001 Barcelona), o bé enviant un correu electrònic a l'adreça [ldades.personals@iec.cat](mailto:ldades.personals@iec.cat).

Desitjo rebre informació sobre les activitats i les publicacions de l'Institut d'Estudis Catalans i de les seves societats filials.

\*Cal adjuntar fotocòpia del comprovant de la matrícula



SCM / Notícies / 44  
Edita la Societat Catalana de Matemàtiques  
Filial de l'Institut d'Estudis Catalans

