GEOMETRIA AXIOMÀTICA

Agustí Reventós i Tarrida

Pròleg

Durant el curs 1991-1992, la Societat Catalana de Matemàtiques de l'I.E.C. m'encarregà de donar un curs de Geometria destinat essencialment als Professors de Matemàtiques de l'Ensenyament Mitjà.

Es tractava de donar un enfocament dels fonaments de la Geometria que fos a la vegada rigorós i no feixuc. El rigor el tenia a l'obra de Hilbert *Fonaments de la Geometria* però era indispensable alleugerir-la d'alguna manera.

La solució adoptada en aquests casos per diversos autors, consistent a introduir un *axioma del regle*, donava lloc a un desenvolupament excessivament senzill que amagava la problemàtica del mètode axiomàtic i que no em semblava, per tant, satisfactori.

Un problema semblant tenia el Professor Joan Girbau, que impartia aleshores un curs de Geometria Elemental per a Filòsofs.

Això provocà una sèrie de converses entre nosaltres que desembocaren en el tractament que donem aquí.

En aquest tractament se segueix de prop l'obra de Hilbert però suposant coneguts els nombres reals. Això fa que, sense perdre el rigor, es pugui donar una presentació força assequible del desenvolupament axiomàtic de la Geometria.

Per acabar vull agrair al Professor Joan Girbau, mestre i amic, tot el suport que m'ha donat.

Introducció

Geometria Axiomàtica

Uns 300 anys abans de la nostra era, el gran geòmetra grec Euclides tractà de recopilar i sobretot ordenar lògicament els molts resultats de Geometria coneguts en el seu temps. En aquella època els grecs ja tenien clar què era una demostració i obtenien nous resultats per raonaments lògics a partir de teoremes ja coneguts.

Però aquests teoremes havien de provenir, per la seva part, també d'altres teoremes coneguts i així successivament.

Per tant, per a poder donar una coherència lògica a l'exposició dels resultats de la Geometria es feia inevitable determinar quins eren els *primers teoremes*, és a dir, en quin punt es podia començar la cadena de raonaments que permetés anar demostrant nous teoremes a partir dels anteriors.

Calia doncs trobar uns resultats o teoremes que fossin tan evidents per si mateixos que no calgués demostrar-los.

Per això Euclides comença la seva gran obra, els *Elements*, amb una llista de 5 postulats, que fan el paper de *primers teoremes* i que són *tan evidents* que hom els accepta sense demostració.

De fet, els tres primers diuen que farà la Geometria del regle i el compàs (per cada dos punts passa una única recta, que pot prolongar tant com vulgui, i pot traçar circumferències amb radi i centre arbitrari). El quart postulat és el que amaga el moviment, tema molt conflictiu a l'època d'Euclides (tots els angles rectes són iguals), i el cinquè és el famós postulat de les paral·leles (per un punt exterior a una recta hi passa una única paral·lela).

Abans però ha donat també 23 definicions (punt, recta, etc.) per a saber de què es parla i 9 regles de lògica (el tot és major que una part, etc.).

A partir d'aquí i amb un rigor que fou considerat modèlic fins al segle XIX, Euclides retroba tots els teoremes de la Geometria Elemental, per bé que algunes qüestions més complicades, com per exemple seccions còniques, tot i ésser conegudes a la seva època, no apareixen als *Elements*.

Durant el segle XIX, sobretot després de la publicació dels treballs de Lobatxevski i Bolyai sobre el cinquè postulat (concretament sobre el fet que aquest postulat no es pot demostrar a partir dels altres quatre), el problema de la fonamentació de la Geometria rep un gran impuls. El rigor dels *Elements* es considera insatisfactori i no serveix per a demostrar la consistència de la geometria de Lobatxevski. Els esforços dels matemàtics de l'època culminen amb l'obra de D. Hilbert *Fonaments de la Geometria*, publicada en 1899, on es dóna ja un sistema complet d'axiomes de la Geometria Euclidiana que venien a substituir els 5 postulats d'Euclides. A diferència però dels *Elements*, a l'obra de Hilbert no hi ha cap definició dels objectes geomètrics considerats. Se suposa únicament que existeixen tres conjunts d'objectes, anomenats *punts*, *rectes* i *plans*, i que entre aquests objectes (i també entre alguns subconjunts d'aquests objectes) existeixen unes certes *relacions*, que es denoten concretament pels termes *pertànyer a*, *estar entre* i *ésser congruent*.

Aquestes relacions, que tampoc es defineixen, han de complir però unes certes propietats que s'expliciten justament a la llista d'Axiomes.

El que nosaltres pretenem fer a continuació és donar una versió simplificada del desenvolupament axiomàtic de la geometria que permeti al lector fer-se una idea clara del mètode axiomàtic.

Per això seguirem els *Fonaments de la Geometria* però amb la gran simplificació de suposar coneguts els nombres reals, que és un dels punts que més complica l'obra de Hilbert. Posarem també de manifest la diferència entre Geometria Absoluta, Euclidiana i Hiperbòlica.

Una altra simplificació que farem, però aquesta és purament per a evitar detalls superflus, és la de considerar només la Geometria plana.

Índex

CAPíTOL 1

Geometria Absoluta

Suposarem doncs que tenim dos conjunts d'objectes. Els elements del primer conjunt els anomenarem PUNTS i els del segon RECTES.

Suposarem també que entre punts i rectes (i també entre alguns subconjunts d'aquests objectes) hi ha unes certes RELACIONS, que anomenarem *pertànyer a*, *estar entre* i *ésser congruent*. Aquestes relacions, arbitràries en llur naturalesa, hauran de complir però les condicions que s'exposen en els següents axiomes.

1.1. Grup I. Axiomes d'incidència

La relació *pertànyer a* és una relació entre punts i rectes que ha de complir:

AXIOMA I.1. *Donats dos punts diferents A i B, existeix una única recta r tal que A pertany a r i B pertany a r.*

La recta r es diu que és la recta determinada per A i B.

AXIOMA I.2. *Existeixen tres punts diferents A, B i C tals que A no pertany a la recta determinada per B i C.*

Per a alleugerir la notació, si un punt A pertany a la recta r direm també que A és un punt de r, que la recta r passa per A o que la recta r conté el punt A. Si B és un altre punt de la recta r direm que A i B estan alineats. Si el punt A pertany a dues rectes diferents r i s direm que r i s es tallen a A o que A és un punt comú a les dues rectes. Amb aquesta notació els axiomes anteriors s'acostumen a escriure aixi:

AXIOMA I.1'. *Donats dos punts diferents A i B, existeix una única recta que els conté.*

AXIOMA I.2'. *Existeixen tres punts no alineats.*

Observeu que d'aquí no es dedueix que cada recta tingui almenys dos punts. Això serà una de les conseqüències del següent grup d'axiomes.

1.2. Grup II. Axiomes d'ordre

La relació *estar entre* és una relació ternària entre els punt d'una recta. És a dir, una relació entre els punts d'una recta i parelles de punts de la mateixa recta. Aquesta relació ha de complir:

AXIOMA II.1. *Existeix una correspondència bijectiva entre el conjunt de punts de qualsevol recta i el conjunt dels nombres reals que conserva la relació "estar entre".*

Observeu que en el conjunt $\mathbb{R}$ dels nombres reals sí que tenim definida de manera natural una relació d'estar entre: a està entre b i c si i només si $b < a < c$ o $c < a < b$.

Si identifiquem cada recta amb el conjunt de punts que pertanyen a aquesta recta, l'axioma II.1 està dient que per a cada recta r existeix una bijecció $\phi\colon r \to \mathbb{R}$ tal que A està entre B i C si i només si $\phi(A)$ està ente $\phi(B)$ i $\phi(C)$.

Del nombre $\phi(P)$ se'n diu coordenada del punt P, però observeu que aquest concepte depèn de la bijecció ϕ que s'escull entre els punts de la recta i els nombres reals.

L'axioma II.1 permet de definir el segment.

DEFINICIÓ 1.1. *Siguin A i B dos punts i sigui r la recta que determinen. Anomenarem segment d'extremitats A i B o simplement segment AB el conjunt de punts de la recta r format per A, B i tots els punts que estan entre A i B.*

Observeu que el segment AB coincideix amb el segment BA i que si la coordenada de A és més petita que la coordenada de B llavors el segment AB està format per aquells punts que tenen la seva coordenada més gran o igual que la coordenada de A i més petita o igual que la coordenada de B.

Hem d'exigir també:

AXIOMA II.2 (Axioma de Pasch). *Siguin A, B i C tres punts diferents no alineats. Sigui r una recta que no passa per cap d'ells.*

Si r talla el segment AB, llavors r talla un i només un dels segments BC i AC.

1.3. Algunes conseqüències dels axiomes d'incidència i ordre

Degut a l'axioma II.1, molts resultats que necessiten una demostració a cops complicada en el model de Hilbert, són aquí evidents.

Per exemple, donats dos punts diferents A i C, existeix sempre un tercer punt D que està entre A i C. Escriurem per simplificar $A - D - C$.

O també que donats tres punts diferents A, B i C sempre es compleix que $A - B - C$ o $B - A - C$ o $A - C - B$. O que entre A i B existeixen infinits punts de la recta, etc. També es dedueix que cada recta té almenys dos punts, cosa que en el model de Hilbert s'ha de postular.

Es pot definir el concepte de semirecta:

DEFINICIÓ 1.2. *Siguin O, A i B tres punts d'una recta r. Si O no està entre A i B direm que A i B estan sobre r a un mateix costat del punt O. El conjunt de punts de la recta r que estan al mateix costat de O que el punt A es diu semirecta d'origen O determinada per A.*

Observeu que si el punt A té coordenada més gran que la coordenada de O, la semirecta d'origen O deteminada per A està formada per tots els punts de la recta r que tenen coordenada més gran que la coordenada de O. I això és independent de quina sigui la correspondència bijectiva de l'axioma II.1 (i.e. independent de les coordenades).

Així com un punt d'una recta la divideix en dues classes (els punts de coordenada més gran i els punts de coordenada més petita) també és cert que una recta divideix el conjunt total de punts (i.e. el pla) en dues classes. Concretament tenim:

TEOREMA 1.1. *Tota recta divideix els punts del pla que no estan a la recta en dos subconjunts no buits de manera que dos punts qualssevol A i B del pla estan en el mateix subconjunt si i només si el segment AB no talla la recta donada.*

DEMOSTRACIÓ. Fixem un punt P del pla que no pertanyi a la recta donada r.

Sigui S el subconjunt de punts del pla format pel propi punt P i per aquells punts Q tals que el segment PQ no té cap punt comú amb r.

Escriurem $S = \{Q \in \text{pla}; PQ \cap r = \emptyset\} \cup \{P\}$. Anàlogament definim $T = \{Q \in \text{pla}; PQ \cap r \neq \emptyset,\ Q \notin r\}$.

Observeu que $S \neq \emptyset$ (car $P \in S$) i que $T \neq \emptyset$ (car si $R \in r$, sempre existeix, per II.1, un punt M sobre la recta determinada per P i R tal que R està entre P i M. Aquest M pertany, per tant, a T). Tenim doncs una partició del pla formada per S, T i els punts de r. Hem de comprovar llavors que donats dos punts qualssevol A i B, estan tots dos a S o tots dos a T si i només si en el segment AB no hi ha cap punt de r.

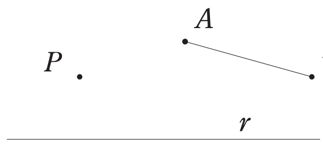

Figura 1.1

Suposem primerament que A i B pertanyen a S (fig. 1.1). Això vol dir que ni el segment PA ni el segment PB tallen r. Per tant, en virtud de l'axioma de Pasch, el segment AB no talla la recta r. Suposem ara que A i B pertanyen a T, llavors tant el segment PA com el segment PB tallen r. Novament per l'axioma de Pasch (concretament per la unicitat) el segment AB no pot tallar la recta r.

Comprovem ara el recíproc. És a dir, suposem que en el segment AB no hi ha cap punt de r. Hem de veure que A i B pertanyen tots dos a S o tots dos a T. Però això és cert ja que en cas contrari tindríem que un d'ells seria de S i l'altre de T. Podem suposar sense perdre generalitat $A \in S$ i $B \in T$. Però llavors el segment PA no tallaria r i el segment PB sí que tallaria r. Per l'axioma de Pasch el segment AB hauria de tallar r en contra de la hipòtesi que estem fent.

Falta considerar, en tota la demostració, el cas en què els punts P, A, B estan alineats, cosa que deixem com a exercici. $\square$

A la pràctica es diu que tota recta divideix el pla en dos costats o semiplans.

Definició 1.3. *Un parell de semirectes h, k amb el mateix origen O i que no pertanyen a una mateixa recta, es diu angle.*

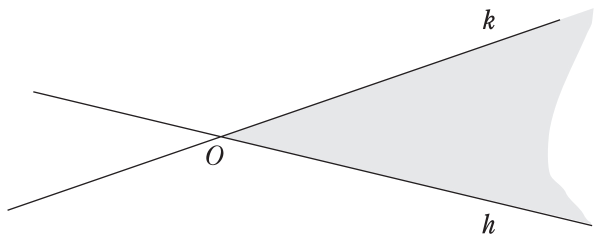

Figura 1.2

El denotarem per $\widehat{h,k}$ o també per $\widehat{AOB}$ amb A i B punts de h i k respectivament. No tenim en compte l'ordre, i.e. $\widehat{h,k}$ denota el mateix que $\widehat{k,h}$.

Les semirectes h i k es diuen costats de l'angle i O el seu vèrtex.

Siguin h' i k' les rectes determinades respectivament per les semirectes h i k. Els punts del pla que es troben al mateix costat de la recta h' que els punts de la semirecta k i al mateix costat de la recta k' que els punts de la semirecta h es diuen punts interiors de l'angle. El conjunt de punts interiors rep el nom de *regió angular*.

TEOREMA 1.2. *Siguin A i B punts situats sobre costats diferents d'un angle i sigui l una semirecta d'origen al vèrtex O de l'angle; llavors l talla el segment AB si i només si tots els punts de l són punts interiors de l'angle.*

DEMOSTRACIÓ. Suposem primerament que l talla el segment AB en un cert punt M. Com que el segment AB no pot tenir punts de les rectes determinades pels costats de l'angle, a part de A i B, aquest punt M és interior a l'angle. Suposem, raonant per l'absurd, que existeix un punt Q de l no interior a l'angle (Fig 1.3).

Això vol dir que Q no pertany al mateix semiplà que B respecte a la recta OA o no pertany al mateix semiplà que A respecte a la recta OB. Com que el raonament és el mateix en ambdós casos, desenvoluparem, tan sols el primer.

En aquest cas el segment QB talla la recta OA. Apliquem ara l'axioma de Pasch al triangle MQB i la recta OA, cosa que podem fer car cap dels tres punts pertany a la recta.

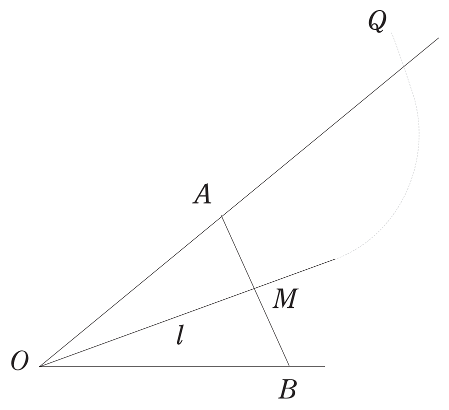

Figura 1.3

Com que el segment QB talla la recta OA, aquesta ha de tallar un i només un dels segments MQ i MB.

Però si tallés MQ les rectes OA i OM tindrien dos punts en comú, cosa que no pot ésser, i si tallés MB les rectes OA i AB tindrien dos punts en comú, cosa que tampoc no pot ésser. Per tant Q ha de ser interior a l'angle.

Suposem ara que tots els punts de l son interiors a l'angle. Fixem C, un punt de la recta OB tal que O estigui entre B i C (1.4). Apliquem novament l'axioma de Pasch aquest cop al triangle ABC i a la recta l^* determinada per la semirecta l i la seva complementària l'. Com que l^* talla BC ha de tallar AC o AB. Però l^* no té cap punt interior a l'angle $\widehat{COA}$, i per tant no pot tallar AC. Per tant l^* talla AB. Com que l' no té punts interiors a $\widehat{AOB}$ ha d'ésser justament l qui talli el segment AB, cosa que acaba la demostració. $\square$

En particular, si una semirecta d'origen el vèrtex d'un angle té un punt interior a l'angle, tots els seus punts són interiors.

1.4. Grup III. Axiomes de congruència

Com que els punts d'una recta no tenen associat d'una vegada per totes un nombre real o coordenada, no podem definir la longitud d'un segment

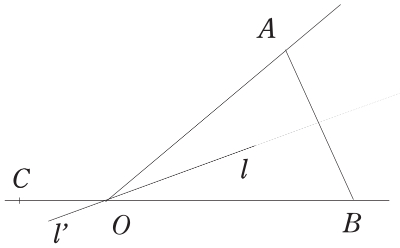

Figura 1.4

com la diferència de les coordenades dels seus extrems, car això dependria de la bijecció que s'elegís en l'axioma II.1. Per a poder comparar segments suposarem que entre ells s'ha definit una relació anomenada *congruència de segments*, que compleix els axiomes següents:

AXIOMA III.1. *Donats dos punts diferents A i B i un tercer punt A' (que pot coincidir amb algun dels anteriors) i donada una semirecta r' d'origen A', existeix un únic punt B' sobre r' tal que el segment AB és* CONGRUENT *amb el segment $A'B'$ (escriurem simplement $AB \equiv A'B'$).*

De moment no sabem si $AB \equiv AB$.

AXIOMA III.2. *Si $A'B' \equiv AB$ i $A''B'' \equiv AB$ llavors $A'B' \equiv A''B''$.*

Com una primera conseqüència d'aquests axiomes es dedueix fàcilment que la congruència de segments és una relació d'equivalencia:

Reflexiva: $AB \equiv AB$ pels axiomes III.1 i III.2.
Simètrica: Si $AB \equiv CD$, com també $CD \equiv CD$, per l'axioma III.2 tenim $CD \equiv AB$.
Transitiva: Si $AB \equiv CD$ i $CD \equiv EF$ també tenim, per la propietat simètrica, que $EF \equiv CD$ i utilitzant novament III.2 tenim $AB \equiv EF$.

AXIOMA III.3. *Siguin AB i BC segments sobre una recta r, sense punts interiors comuns. Siguin $A'B'$ i $B'C'$ segments sobre una recta r' sense punts interiors comuns. Si $AB \equiv A'B$' i $BC \equiv B'C'$ llavors $AC \equiv A'C'$.*

Observeu que si, en les mateixes hipòtesis tenim $AB \equiv A'B'$ i $AC \equiv A'C'$ llavors també és $BC \equiv B'C'$.

En efecte, per axioma III.1 existeix un únic C'' sobre la semirecta d'origen B' que conté C', tal que $BC \equiv B'C''$, llavors per axioma III.3, $AC \equiv A'C''$ que juntament amb $AC \equiv A'C'$ i la unicitat dóna $C' = C''$ i per tant $BC \equiv B'C'$.

Aquest axioma ens permetrà doncs *sumar* i *restar* segments.

Per poder sumar i restar angles, de manera semblant a com ho fem amb els segments, necessitem també suposar que tenim una certa relació entre ells, anomenada *congruència d'angles*, que compleixi els axiomes següents:

Axioma III.4. *Suposem donats un angle* $\widehat{h,k}$ *una recta* r' *i un costat del pla determinat per* r'. *Sigui* h' *una semirecta de* r' *amb origen* O'. *Existeix llavors una única semirecta* k' *d'origen* O' *tal que l'angle* $\widehat{h,k}$ *és congruent a l'angle* $\widehat{h',k'}$ *(escriurem tan sols* $\widehat{h,k} \equiv \widehat{h',k'}$*) i tal que els punts interiors de* $\widehat{h',k'}$ *estan en el costat del pla prefixat respecte a* r'.

A més $\widehat{h,k} \equiv \widehat{h,k}$.

Aquest axioma es resumeix dient que tot angle pot ésser aplicat de manera única a un costat donat d'una semirecta donada.

Finalment, el següent axioma ens relaciona la congruència d'angles amb la congruència de segments (fig. 1.5).

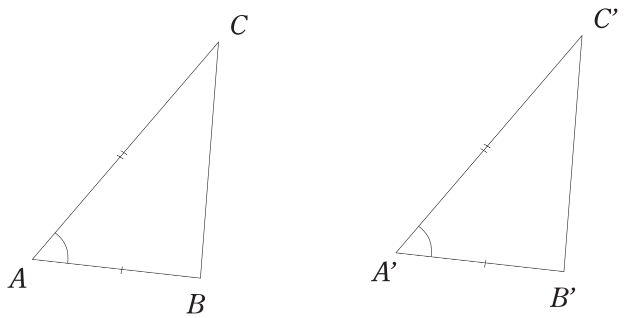

Figura 1.5

AXIOMA III.5. *Siguin A, B i C tres punts no alineats i A', B' i C' tres punts més tampoc alineats. Si $AB \equiv A'B'$; $AC \equiv A'C'$ i $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$, llavors $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ i $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$.*

Aquest axioma ens permetrà demostrar que la congruència d'angles és una relació d'equivalència.

1.5. Algunes conseqüències dels grups d'axiomes I, II i III. Geometria Absoluta

Per Geometria Absoluta s'entén tota la sèrie de resultats que s'obtenen a partir dels axiomes d'incidència, ordre i congruència.

Comencem pel teorema que expresa que la congruència de segments manté la relació d'*estar entre*.

TEOREMA 1.3. *Siguin A, B i C tres punts alineats i A', B', C' tres punts també alineats. Suposem $AB \equiv A'B'$ i $AC \equiv A'C'$. Si B està entre A i C, i B' és al mateix costat que C' respecte a A', llavors B' està entre A' i C'.*

DEMOSTRACIÓ. Aplicant l'axioma III.1 als punts B, C i la semirecta d'origen B' que no conté A', existeix un únic punt C^* sobre aquesta semirecta tal que $BC \equiv B'C^*$. Aplicant ara III.3 tenim que $AC \equiv A'C^*$ i per tant $A'C' \equiv A'C^*$. Com que C' i C^* són al mateix costat de A', per unicitat tenim $C' = C^*$. Com B' estava entre A' i C^*, ja hem acabat. □

La figura formada per tres punts no alineats i els tres segments que determinen es diu *triangle*.

DEFINICIÓ 1.4. *Direm que el triangle ABC és congruent al triangle $A'B'C'$ (i escriurem $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$) si i només si $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $BC \equiv B'C'$, $\widehat{A} \equiv \widehat{A}'$, $\widehat{B} \equiv \widehat{B}'$, $\widehat{C} \equiv \widehat{C}'$.*

Observeu que per abús de llenguatge hem escrit $\widehat{A}$ en lloc d'angle $\widehat{BAC}$, $\widehat{B}$ en lloc d'angle $\widehat{ABC}$, etc.

TEOREMA 1.4 (Criteri C.A.C., costat-angle-costat). *Si en els triangles ABC i $A'B'C'$ es compleix $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\widehat{A} \equiv \widehat{A}'$, llavors el triangle ABC és congruent al triangle $A'B'C'$.*

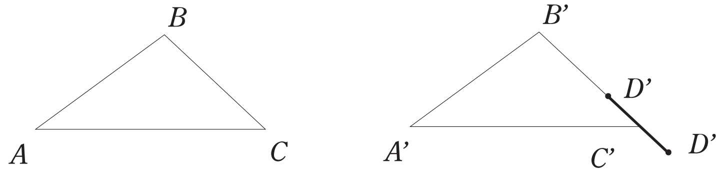

Figura 1.6

Demostració. Per l'axioma III.5, $\widehat{B} \equiv \widehat{B}'$, $\widehat{C} \equiv \widehat{C}'$. Per tant tan sols hem de comprovar $BC \equiv B'C'$. Apliquem l'axioma III.1 al segment BC i a la semirecta d'origen B' que conté C'. Existeix un únic punt D' sobre aquesta semirecta tal que $BC \equiv B'D'$ (fig. 1.6). Aplicant ara III.5 als triangles ABC, $A'B'D'$ tenim $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'D'}$. Però per hipòtesi $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$. Per la unicitat expressada a III.4 les semirectes d'origen A', $A'C'$ i $A'D'$ han de coincidir. Així, D' és a les rectes $A'C'$ i $B'C'$ i per tant $D' = C'$, que juntament amb $BC \equiv B'D'$ acaba la demostració. □

Observeu que no s'han utilitzat (perquè encara no han estat demostrades) ni la propietat simètrica ni la propietat transitiva de la congruencia d'angles.

Teorema 1.5 (Criteri A.C.A., angle-costat-angle). *Si per als triangles ABC, $A'B'C'$ es compleix $AB \equiv A'B'$, $\widehat{A} \equiv \widehat{A}'$ i $\widehat{B} \equiv \widehat{B}'$, llavors $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*

Demostració. Tan sols hem de demostrar que $BC \equiv B'C'$, car llavors ja podrem aplicar el criteri C.A.C. (fig. 1.7).

Sigui D' l'únic punt de la semirecta d'origen B' que conté C' tal que $BC \equiv B'D'$ (axioma III.1).

Pel criteri C.A.C. aplicat als triangles ABC, $A'B'D'$, tenim $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'D'}$. Però $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$ per hipòtesi, per tant per la unicitat expressada a III.4 les semirectes d'origen A', $A'C'$ i $A'D'$ han de coincidir. Això implica, com en el teorema anterior, que $D' = C'$ i per tant $BC \equiv B'C'$ com volíem demostrar. □

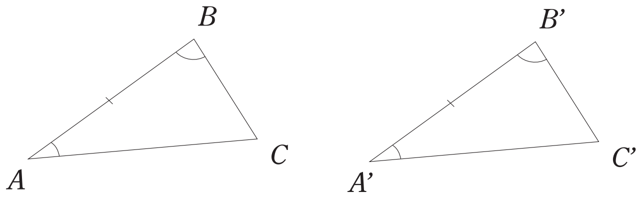

Figura 1.7

El següent teorema afirma per als angles el mateix que l'axioma III.3 per als segments.

TEOREMA 1.6. *Siguin h, k, l i h', k', l' semirectes d'orígens O i O' respectivament. Suposem que l és interior a l'angle $\widehat{h,k}$ i l'interior a l'angle $\widehat{h',k'}$. Si $\widehat{h,l} \equiv \widehat{h'l'}$ i $\widehat{l,k} \equiv \widehat{l',k'}$, llavors $\widehat{h,k} \equiv \widehat{h',k'}$.*

DEMOSTRACIÓ. Per III.4 existeix una semirecta k'' d'origen O' situada en el semiplà de h' que conté k' tal que $\widehat{h,k} \equiv \widehat{h'k''}$.

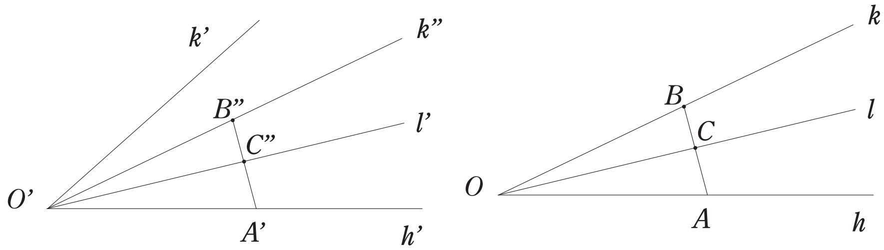

Figura 1.8

Prenem ara $A \in h$, $B \in k$ i sigui C la intersecció de la semirecta l (interior a l'angle) amb el segment AB. Prenem a continuació A' i B' sobre h' i k" respectivament tals que $OA \equiv O'A'$ i $OB \equiv O'B''$ (fig. 1.8). Pel criteri C.A.C. aplicat als triangles OAB i $O'A'B''$ resulta $AB \equiv A'B'$.

Sigui ara C'' l'únic punt de la semirecta d'origen A' que conté B'' tal que $AC \equiv A'C''$ (axioma III.1).

Afirmem ara que $C'' \in l'$. En efecte, pel Teorema 1.3, C'' està entre A' i B''. Pel comentari posterior a l'axioma III.3, restant segments, resulta que $BC \equiv B''C''$.

Com que el triangle OAB és congruent al triangle $O'A'B''$ tenim $\widehat{OAC} \equiv \widehat{O'A'C''}$ i $\widehat{OBC} \equiv \widehat{O'B''C''}$. Aplicant el criteri C.A.C. als triangles OAC i $O'A'C''$ tenim $\widehat{AOC} \equiv \widehat{A'O'C''}$. Però això implica, utilitzant III.4, que $C'' \in l'$ com havíem afirmat.

Per altra part, aplicant el criteri C.A.C. als triangles OBC i $O'B''C''$ resulta que $\widehat{COB} \equiv \widehat{C''O'B''}$, que juntament amb l'anterior ens diu que $\widehat{l,k} \equiv \widehat{l',k''}$. Com per hipòtesi teníem $\widehat{l,k} \equiv \widehat{l',k'}$, resulta, per III.4, que les semirectes k' i k'' coincideixen, cosa que acaba la demostració. □

Observeu que si en les mateixes hipòtesis tenim $\widehat{h,l} \equiv \widehat{h',l'}$ i $\widehat{h,k} \equiv \widehat{h',k'}$, llavors també $\widehat{l,k} \equiv \widehat{l',k'}$.

En efecte, per III.4 existeix una semirecta k'' d'origen O' situada en el semiplà de l' que conté k' tal que $\widehat{l,k} \equiv \widehat{l',k''}$ llavors, pel teorema $\widehat{h,k} \equiv \widehat{h,k''}$ i per unicitat $k' = k''$, com volíem. Podem, doncs, restar angles.

El teorema següent és l'anàleg, per a angles, del Teorema 1.3 (i.e. la congruència d'angles manté la relació d'*estar entre*).

TEOREMA 1.7. *Siguin h, k, l i h', k' l' semirectes d'orígens respectius O i O'. Suposem k interior a l'angle $\widehat{h,l}$ i que les semirrectes k' i l' són a un mateix costat de la recta determinada per h'. Si $\widehat{h,k} \equiv \widehat{h',k'}$ i $\widehat{h,l} \equiv \widehat{h',l'}$, llavors la semirecta k' és interior a l'angle $\widehat{h',l'}$.*

DEMOSTRACIÓ. Prenem punts A, C sobre h i l respectivament i punts A', C' sobre h' i l' respectivament, de manera que $OA \equiv O'A'$ i $OC \equiv O'C'$ (fig. 1.9).

Sigui B el punt d'intersecció de k amb el segment AC i sigui B' l'únic punt de la semirecta d'origen A' que conté C' tal que $AB \equiv A'B'$. Pel Teorema 1.3, B' està entre A' i C'. Aplicant el criteri C.A.C. als triangles OAC i $O'A'C'$ resulta que $\widehat{OAC} \equiv \widehat{O'A'C'}$, cosa que permet aplicar novament el criteri C.A.C.,

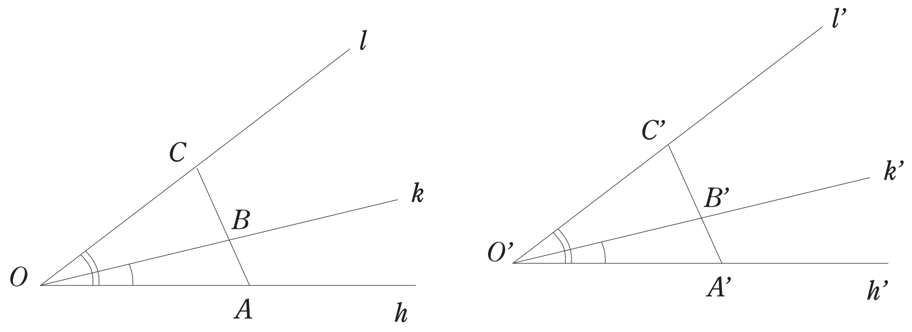

Figura 1.9

aquest cop als triangles AOB i $A'O'B'$, i deduir $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$, congruència que implica $B' \in k'$ i per tant, pel Teorema 1.2, que k' és interior a l'angle $\widehat{h', l'}$ com volíem demostrar. □

Teorema 1.8 (Criteri del triangle isòsceles). *Si en el triangle ABC tenim $CA \equiv CB$, llavors $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$.*

Demostració. Podem aplicar III.5 als triangles CAB i CBA, car tenim $CA \equiv CB$, $CB \equiv CA$ y $\widehat{ACB} \equiv \widehat{BCA}$. Això implica directament $\widehat{CAB} \equiv \widehat{CBA}$, com volíem (fig. 1.10). □

Observeu que, per la propietat simètrica de la congruència de segments, també tenim $\widehat{B} \equiv \widehat{A}$.

Teorema 1.9 (Criteri C.C.C., costat-costat-costat). *Si en els triangles ABC, $A'B'C'$ es compleix $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ i $BC \equiv B'C'$, llavors $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*

Demostració. Per III.4 existeix una semirecta r d'origen A' i del mateix costat que B' respecte a la recta $A'C'$ tal que $\widehat{CAB} \equiv \widehat{C'A'B'}_1$, on B'_1 és un punt de r tal que $A'B' \equiv A'B'_1$ (fig. 1.11).

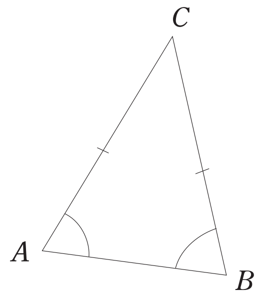

Figura 1.10

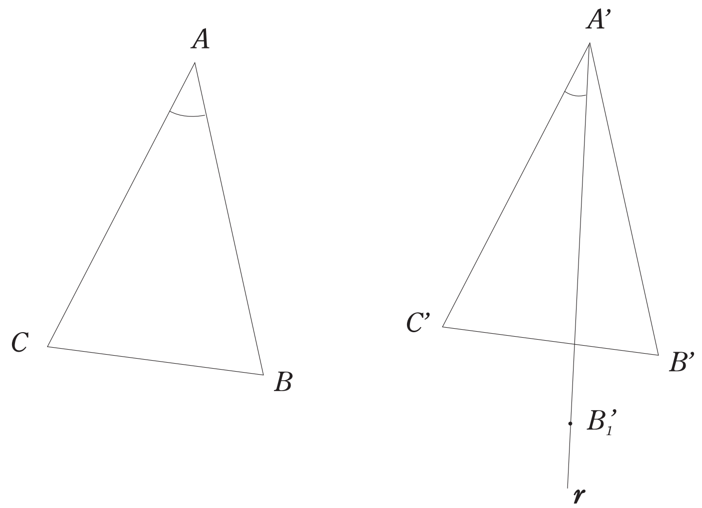

Figura 1.11

Pel criteri C.A.C. aplicat als triangles ABC i $A'B_1'C'$ tenim

$$CB \equiv C'B_1'. \tag{1.1}$$

Novament per III.4 existeix una semirecta s d'origen A' del costat oposat de B' respecte a la recta $A'C'$ tal que $\widehat{C'A'B'_1} \equiv C'A'B'_2$, on B'_2, és un punt de s tal que $A'B'_1 \equiv A'B'_2$, (fig. 1.12).

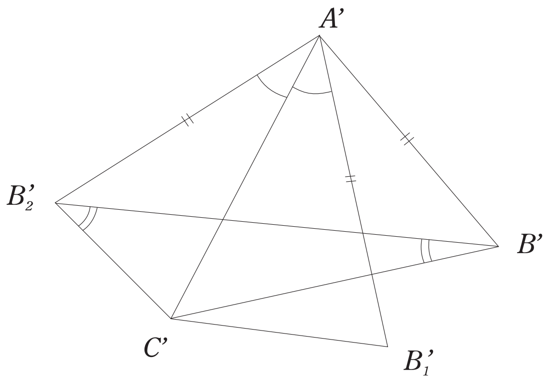

Figura 1.12

Pel criteri C.A.C. aplicat als triangles $A'C'B'_1$ i $A'C'B'_2$ tenim

$$B'_2C' \equiv C'B'_1. \tag{1.2}$$

De (1.1) i (1.2) es dedueix $B'_2C' \equiv C'B'$ i per tant (Teorema 1.8) $\widehat{C'B'_2B'} \equiv \widehat{C'B'B'_2}$. Pel mateix teorema també $\widehat{A'B'_2B'} \equiv \widehat{A'B'B'_2}$. Del Teorema 1.6 i la observació que el segueix (no és clar que la recta $B'B'_2$ sigui interior a l'angle $\widehat{A'B'_2C'}$) es dedueix que $\widehat{A'B'_2C'} \equiv \widehat{A'B'C'}$. Això permet aplicar el criteri C.A.C. als triangles $\widehat{A'B'_2C'}$ i $\widehat{A'C'B'}$ per a deduir-ne que $\widehat{C'A'B'_2} \equiv \widehat{C'A'B'}$.

Anàlogament es demostra que $\widehat{C'A'B'_2} \equiv \widehat{C'A'B'_1}$, ja que el triangle $C'B'_2B'_1$ és isòsceles. Això diu que $\widehat{C'A'B'_1}$ és, no solament congruent, sinó igual (Axioma III.4) a l'angle $\widehat{C'A'B'}$.

Per tant $\widehat{CAB} \equiv \widehat{C'A'B'}$ i podem aplicar ja el criteri C.A.C. als triangles ABC i $A'B'C'$, cosa que demostra el teorema. $\square$

Com que la congruència de segments és simètrica també hem demostrat que $\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC$.

Aquest teorema ens permet demostrar la transitivitat i, com a corol·lari, la simetria de la congruència d'angles:

TEOREMA 1.10. *Si* $\widehat{h,k} \equiv \widehat{h',k'}$ *i* $\widehat{h,k} \equiv \widehat{h'',k''}$*, llavors* $\widehat{h',k'} \equiv \widehat{h'',k''}$*.*

DEMOSTRACIÓ. Denotem els vèrtexs de $\widehat{h,k}$, $\widehat{h',k'}$ i $\widehat{h'',k''}$ per O, O' i O'' respectivament. Fixem un punt A sobre h i un punt B sobre k. Sabem que existeixen llavors punts A', B', A'', B'' sobre h', k', h'', k''' respectivament tals que $OA \equiv O'A'$, $OB \equiv O'B'$, $OA \equiv O''A''$, $OB \equiv O''B''$. D'aquí es dedueix $AB \equiv A'B'$ i $AB \equiv A''B''$. Per la transitivitat de la congruència de segments tenim $A'B' \equiv A''B''$, $O'A' \equiv O''A''$ i $O'B' \equiv O''B''$, cosa que implica, pel criteri C.C.C. que $\widehat{h',k'} \equiv \widehat{h'',k''}$. □

De la propietat reflexiva de la congruència d'angles i d'aquest resultat se'n dedueixen trivialment les propietats simètrica i transitiva. És a dir, la congruència d'angles és una relació d'equivalència.

Aquests 10 teoremes, de demostracions delicades pel fet que s'ha de recórrer constantment als axiomes, formen ja una base prou sòlida per a anar desenvolupant bastant àgilment els altres resultats de la Geometria.

1.6. Més conseqüències dels grups d'axiomes I, II i III

DEFINICIÓ 1.5. *Dos angles amb vèrtex comú, un costat comú i tals que els altres dos costats formen una línia recta es diuen adjacents. Dos angles amb vèrtex comú tals que els seus costats formen línies rectes dos a dos, es diuen oposats pel vèrtex.*

Observem que un angle $\widehat{h,k}$ té dos angles adjacents: el format per h i la semirecta oposada a k i el format per k i la semirecta oposada a h.

TEOREMA 1.11. *Si dos angles són congruents, els angles adjacents corresponents també ho són.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $\widehat{h,k} \equiv \widehat{h',k'}$ siguin O i O' els vèrtexs respectius. Fixem punts A, B sobre h i k respectivament i C sobre la recta OA de manera que O estigui entre C i A. Per III.1 existeixen punts A', B' sobre h' i k'

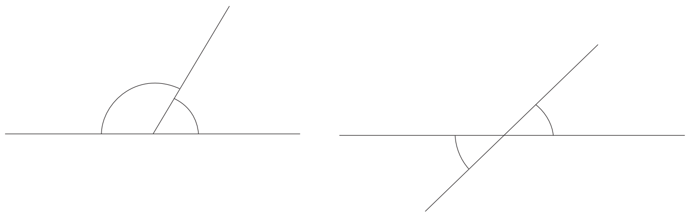

Figura 1.13

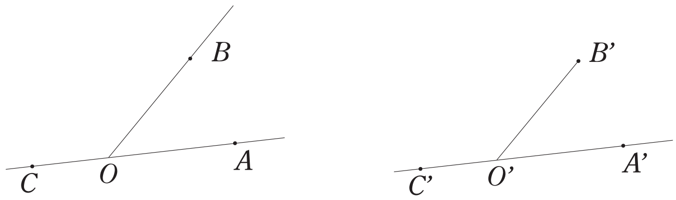

Figura 1.14

respectivament i C' sobre la recta $O'A'$ de manera que O' estigui entre C' i A' tals que $OA \equiv O'A'$, $OB \equiv O'B'$ i $OC \equiv O'C'$ (fig. 1.14).

Per III.3, $AC \equiv A'C'$. Pel criteri C.A.C., $AB \equiv A'B'$ i $\widehat{OAB} \equiv \widehat{O'A'B'}$. Per tant $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ i en particular $BC \equiv B'C'$. Pel criteri C.C.C., $\triangle BOC \equiv \triangle B'O'C'$ i en particular $\widehat{BOC} \equiv \widehat{B'O'C'}$, com volíem demostrar. □

Observeu que la demostració continua essent certa si en lloc de prolongar la semirecta OA prolonguem la semirecta OB. Per tant, els dos angles adjacents a un angle donat són congruents.

TEOREMA 1.12. *Angles oposats pel vèrtex són congruents entre ells.*

DEMOSTRACIÓ. Denotem per h' i k' les prolongacions de les semirectes d'un cert angle donat $\widehat{h,k}$ (fig. 1.15).

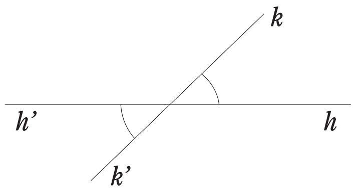

Figura 1.15

Com que $\widehat{k,h'} \equiv \widehat{h,k'}$, pel Teorema 1.11, $\widehat{h,k} \equiv \widehat{h',k'}$ com es volia demostrar. □

DEFINICIÓ 1.6. *Un angle congruent amb el seu adjacent es diu* RECTE.

Abans d'estudiar-ne les seves propietats comprovem que efectivament existeixen angles rectes. Per això partim d'un angle $\widehat{h,k}$ i construïm, utilitzant com sempre III.4, un angle $\widehat{k,h'}$ congruent amb l'anterior sense punts interiors comuns i amb el mateix vèrtex O que $\widehat{h,k}$.

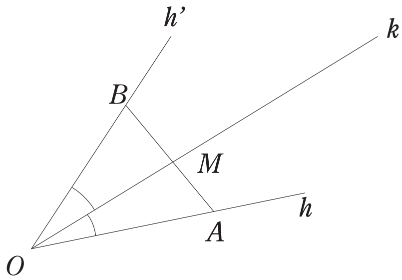

Figura 1.16

Fixem llavors punts A sobre h i B sobre h' amb $OA \equiv OB$. Si O pertany al segment AB el propi angle $\widehat{h,k}$ és ja recte.

En cas contrari, AB talla la semirecta k (fig. 1.16) o bé la seva complementària (fig. 1.17).

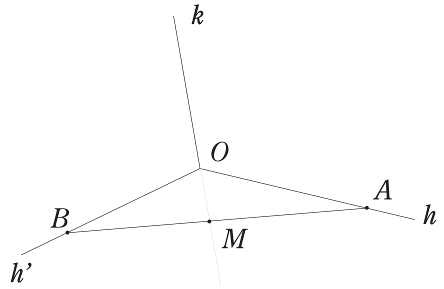

Figura 1.17

En el primer cas, aplicant per exemple el criteri C.A.C. als triangles OAM i OBM, s'obté $\widehat{BMO} \equiv \widehat{OMA}$ i per tant aquest angle és recte.

En el segon cas, el Teorema 1.11 asegura $\widehat{BOM} \equiv \widehat{MOA}$, i a partir d'aquí la demostració és com en el cas anterior.

El teorema següent figurava com el quart postulat d'Euclídes.

Teorema 1.13. *Tots els angles rectes són congruents.*

Demostració. Siguin $\widehat{h,k}$ i $\widehat{h',k'}$ angles rectes de vèrtexs respectius O i O' i siguin $\widehat{k,h_1}$ i $\widehat{k',h'_1}$ el seus adjacents (h_1 i h'_1 són les semirectes oposades a h i h' respectivament) (fig. 1.18).

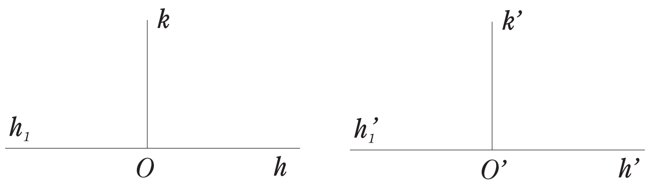

Figura 1.18

Per III.4 existeix una única semirecta k'' d'origen O' del mateix costat de h' que k' tal $\widehat{h,k} \equiv \widehat{h',k''}$. Si $k' = k''$ ja hem acabat. Si no, pot ésser que sigui interior a $\widehat{h', k'}$ o interior a $\widehat{h'_1, k'}$. Però ambdues suposicions ens portaran a contradicció. La demostració és anàloga en tots dos casos i per tant estudiarem tan sols el cas en que k'' és interior a $\widehat{h', k'}$.

Per III.4 existeix una única semirecta k''_1 d'origen O' del mateix costat de h'_1 que k' tal $\widehat{h', k''} \equiv \widehat{h'_1, k''_1}$ (fig. 1.19).

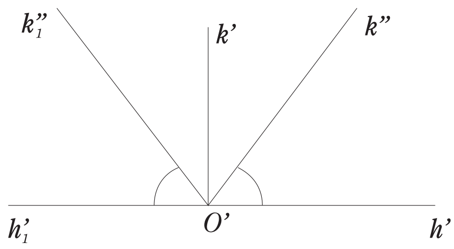

Figura 1.19

Pel Teorema 1.7, k''_1 és interior a $\widehat{h'_1, k'}$. Pel Teorema 1.11, com que $\widehat{h, k} \equiv \widehat{h', k''}$, resulta que $\widehat{h_1, k} \equiv \widehat{h'_1, k''}$. Però, i finalment, per tractar-se d'angles rectes,

$$\widehat{h_1, k} \equiv \widehat{h, k} \equiv \widehat{h', k''} \equiv \widehat{h'_1, k''_1},$$

d'on es dedueix $\widehat{h'_1, k''} \equiv \widehat{h'_1, k''_1}$ i per tant $k'' = k''_1$, en contradicció amb el fet d'ésser k'' interior a $\widehat{h', k'}$ i k''_1, interior a $\widehat{h'_1, k'}$.

Per tant l'única possibilitat és $k' = k''$, cosa que acaba la demostració. $\square$

Si l'angle $\widehat{h, k}$ és recte, es diu que les semirectes h, k (o les rectes que determinen) són *perpendiculars*.

A les demostracions que segueixen, si el context és prou clar, no citarem ja els axiomes que estiguem utilitzant.

Definició 1.7. *Un punt O de la recta determinada per dos punts A i B és punt mig del segment AB si $AO \equiv OB$.*

Teorema 1.14. *Per a cada segment existeix un únic punt mig. Aquest punt és un punt interior del segment.*

Demostració. Donat el segment AB prenem un punt qualsevol M no alineat amb A i B. Existeix llavors un únic punt N tal que $\widehat{MAB} \equiv \widehat{NBA}$, $MA \equiv BN$ i M i N situats a semiplans diferents respecte a la recta AB.

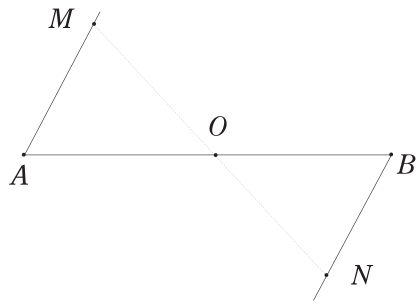

Figura 1.20

Sigui O el punt d'intersecció de la recta MN amb la recta AB (fig. 1.20).

Si les rectes AM i NB es tallessin (més endavant es demostrarà que això no pot passar) elegim M entre A i el punt d'intersecció. Així ens assegurarem que $A \neq O$ i $B \neq O$.

Observem ara que O és interior al segment AB. Per això suposem que està a la dreta de B (i.e., B estar entre A i O) i apliquem Pasch al triangle OMA (fig. 1.21).

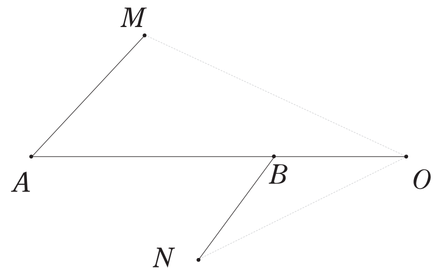

Figura 1.21

La recta BN talla el segment AO però no talla ni el segment OM (les rectes tindrien dos punts en comú) ni el segment AM (per l'observació anterior). Per tant O és interior al segment AB.

Aplicant el criteri C.A.C. als triangles ABM i ABN tenim $AN \equiv MB$, congruència que ens permet aplicar el criteri C.C.C. als triangles AMN i MNB i deduir $\widehat{AMN} \equiv \widehat{MNB}$.

Aplicant ara el criteri A.C.A. als triangles MAO i OBN obtenim $AO \equiv OB$ i O és punt mig.

Passem ara a demostrar la unicitat. Suposem que O_1, i O_2 són punts mitjos del segment AB. Sense perdre generalitat podem suposar O_2 entre O_1 i B.

Apliquem llavors el Teorema 1.3 a les ternes A, O_1, O_2 i B, O_1, O_2 cosa que es pot fer doncs $AO_1 \equiv BO_1$ i $AO_2 \equiv BO2$. Se'n dedueix directament que O_1 està entre B i O_2 en contra de la hipòtesi que hem fet. $\square$

TEOREMA 1.15. *Tot angle es pot dividir de manera única per la meitat.*

DEMOSTRACIÓ. Donat l'angle $\widehat{h,k}$ de vèrtex O, s'agafen punts A i B sobre h i k respectivament amb $OA \equiv OB$. Sigui C el punt mig del segment AB. Pel criteri C.C.C., els triangles AOC i BOC són congruents, i en particular $\widehat{AOC} \equiv \widehat{COB}$, i.e., la recta OC divideix $\widehat{h,k}$ per la meitat.

La unicitat es desprèn de la unicitat del punt mig d'un segment. $\square$

La semirecta per l'origen d'un angle i que el divideix per la meitat, es diu *bisectriu*.

La recta que passa pel vèrtex d'un triangle i és perpendicular al costat oposat es diu *altura* del triangle relativa a aquest vèrtex.

La recta que passa pel vèrtex d'un triangle i pel punt mig del costat oposat es diu *mitjana*.

Repetint la demostració del Teorema 1.15 tenim el resultat següent.

TEOREMA 1.16. *En un triangle isòsceles la mitjana a la base és altura i bisectriu de l'angle al vèrtex.*

DEMOSTRACIÓ. Si ABC és el triangle isòsceles de base BC ($AB \equiv AC$) i O és el punt mig de la base, els triangles AOB i AOC són congruents (criteri C.C.C.). El teorema és llavors immediat. $\square$

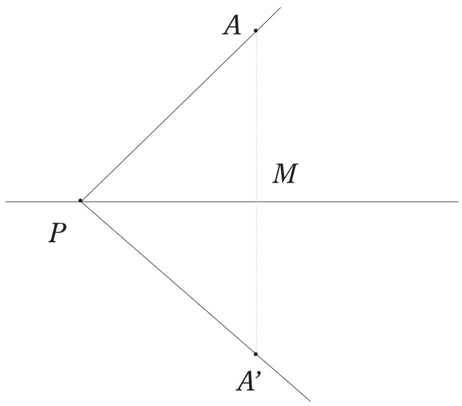

Figura 1.22

TEOREMA 1.17. *Des de cada punt exterior a una recta donada es pot traçar una única perpendicular.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui A un punt que no pertany a la recta r. Sigui P un punt arbitrari de r. Existeix un únic punt A' situat en el costat de r que no conté A, tal que $PA \equiv PA'$ i tal que $\widehat{APQ} \equiv \widehat{A'PQ}$, on Q és un punt fixat qualsevol de r diferent de P.

Sigui M el punt d'intersecció entre r i el segment AA'. Pel criteri C.A.C. aplicat als triangles APM i $A'PM$ obtenim $\widehat{AMP} \equiv \widehat{A'MP}$ i per tant la recta AA' és la perpendicular buscada (fig. 1.22).

Per demostrar la unicitat suposem que des del punt A hem traçat dues perpendiculars AB i AC a la recta r ($B \in r$, $C \in r$). Existeix A' sobre la recta AB, de l'altre costat de r tal que $AB \equiv BA'$ (fig. 1.23).

Aplicant el criteri C.A.C. als triangles ABC i $A'BC$ tenim $\widehat{ACB} \equiv \widehat{BCA'}$. Com que $\widehat{ACB}$ és recte, $\widehat{BCA'}$ ha de ser el seu adjacent i per tant les rectes AC i $A'C$ coincideixen. Com que A i A' determinen una única recta, $B = C$. $\square$

TEOREMA 1.18. *Des de cada punt sobre una recta donada es pot aixecar una única perpendicular.*

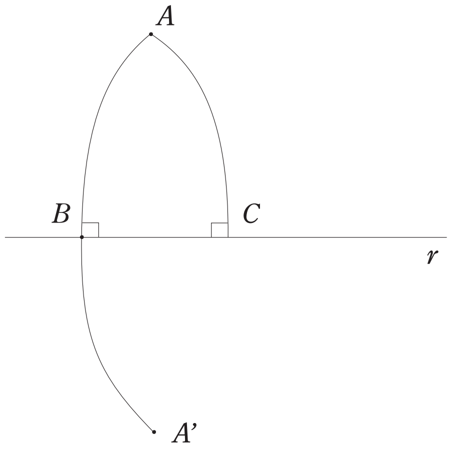

Figura 1.23

Demostració. Sigui $P \in r$ i A un punt arbitrari fora de r. Existeix un únic punt B, del mateix costat de r que A, tal que $PA \equiv PB$ i tal que l'angle entre AP i r sigui congruent amb l'angle entre BP i r (fig. 1.24).

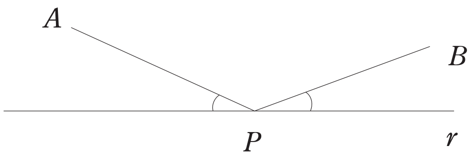

Figura 1.24

El triangle APB és isòsceles i la mitjana a la base és la perpendicular buscada, com es desprèn del Teorema 1.6 i del fet d'ésser bisectriu de $\widehat{APB}$. $\square$

Per a poder enunciar el teorema següent comentem prèviament que tant per a angles com per a segments té sentit la comparació *major que* ($>$) o *menor que* ($<$).

DEFINICIÓ 1.8. *Direm* $\widehat{h,k} > \widehat{h',k'}$ *si i només si existeix* k'' *interior a* $\widehat{h,k}$*, tal que* $\widehat{h',k'} \equiv \widehat{h,k''}$*. Direm* $AB > CD$ *si i només si existeix* E *entre* A *i* B *tal que* $AE \equiv CD$*.*

TEOREMA 1.19. *L'angle exterior d'un triangle és més gran que cada un dels interiors no adjacents.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui donat el triangle ABC i denotem per $\widehat{C'}$ l'angle adjacent a $\widehat{C}$ (fig. 1.25). Demostrarem tan sols $\widehat{C'} > \widehat{B}$, car el cas $\widehat{C'} > \widehat{A}$ és totalment anàleg.

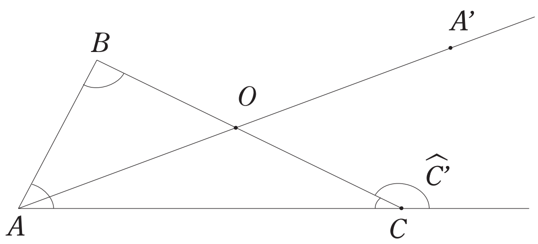

Figura 1.25

Sigui O el punt mig del costat BC. Sobre la recta AO determinem A' tal que $AO \equiv OA'$. Pel Teorema 1.12 i el criteri C.A.C. aplicat als triangles AOB i $OA'C$ obtenim $\widehat{OCA'} \equiv \widehat{B}$.

Observeu a continuació que A' és un punt interior a $\widehat{C'}$ i que per tant $\widehat{C'} > \widehat{B}$. □

En particular, se'n desprèn que en tot triangle almenys dos angles són aguts.

TEOREMA 1.20 (Criteri A.A.C., angle-angle-costat). *Si en els triangles* ABC*,* $A'B'C'$ *es compleix* $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$*,* $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$ *i* $\widehat{BC} \equiv \widehat{B'C'}$*, llavors* $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$*.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui D el punt sobe la semirecta d'origen B que conté A tal que $BD \equiv B'A'$. Si $D = A$ hem acabat. En cas contrari, com que els triangles BDC i $A'B'C'$ són congruents tenim $\widehat{BDC} \equiv \widehat{A}'$, en contradicció amb el Teorema 1.19. □

TEOREMA 1.21. *En tot triangle a major costat li correspon major angle i recíprocament.*

DEMOSTRACIÓ. Suposem donat un triangle ABC i denotem per a, b i c els costats oposats als vèrtexs A, B i C respectivament (fig. 1.26).

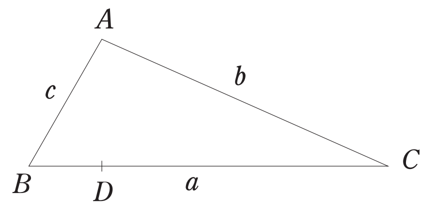

Figura 1.26

Suposem $a > b$. Per definició vol dir que existeix un D de a tal que $b \equiv DC$. Pel Teorema 1.8, $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ADC}$. Pel Teorema 1.19, $\widehat{ADC} > \widehat{B}$. Com que la recta AD és interior a l'angle $\widehat{A}$ resulta, per definició que $\widehat{A} > \widehat{ADC}$. Com que la relació *major que* és clarament transitiva, tenim $\widehat{A} > \widehat{B}$, cosa que acaba la primera part de la demostració.

Suposem ara $\widehat{A} > \widehat{B}$. Hem de demostrar que $a > b$. Ho farem per l'absurd, és a dir suposarem $a < b$ o $a \equiv b$. Existeix llavors un punt D sobre el segment AC (possiblement igual a A) tal que $a \equiv DC$ (fig. 1.27). Pel Teorema 1.8, $\widehat{CBD} \equiv \widehat{BDC}$. Pel Teorema 1.19, $\widehat{BDC} > \widehat{A}$. Per ser BD interior a l'angle $\widehat{B}$ tenim $\widehat{B} > \widehat{CBD}$, d'on $\widehat{B} > \widehat{A}$, contradicció. □

TEOREMA 1.22. *La perpendicular és més curta que qualsevol obliqua.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui A un punt exterior a la recta r. Siguin B i C punts sobre r tals que AB és perpendicular a r (fig. 1.28).

Com que B és recte, pel Teorema 1.19 tenim $\widehat{B} > \widehat{C}$, d'on es dedueix, utilitzant ara el Teorema 1.21, que $AC > AB$. □

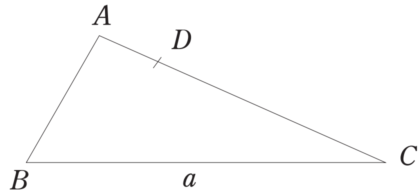

Figura 1.27

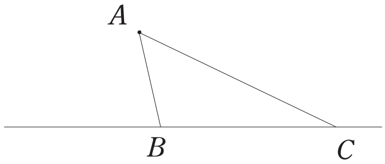

Figura 1.28

TEOREMA 1.23. *Cada costat d'un triangle és més petit que la "suma"dels altres dos i major que la "diferència".*

DEMOSTRACIÓ. Donat el triangle ABC tracem la perpendicular des de A a la recta BC. Tenim tres possibilitats:

i) La perpendicular coincideix amb la recta AB (fig. 1.29). Llavors, pel Teorema 1.22, $BC < AC$ i en particular BC és més petit que la *suma* dels altres dos (per suma entenem el segment que s'obté al posar un costat alineat i a continuació de l'altre).

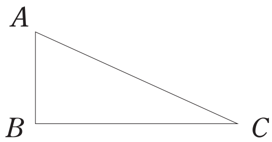

Figura 1.29

ii) La perpendicular no talla el segment BC (fig. 1.30).

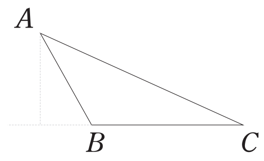

Figura 1.30

Si O és el peu de la perpendicular, tenim $BC < OC$ i $OC < AC$ pel Teorema 1.22. En particular BC és més petit que la suma dels altres dos.

iii) La perpendicular talla el segment BC (fig. 1.31). Si O és el peu de la perpendicular tenim $OB < AB$ i $OC < AC$ pel Teorema 1.22. Sigui ara A' el punt sobre la recta BC, en el mateix costat que C respecte a B, tal que $BA \equiv BA'$. Transportem a continuació AC sobre la semirecta d'origen A' que conté C. Existeix un únic punt C' en aquesta semirecta tal que $AC \equiv A'C'$. Ara és fàcil veure, a partir de les relacions anteriors, que C és interior a BC' i per tant el costat BC és més petit que la *suma* dels altres dos.

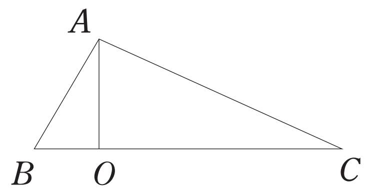

Figura 1.31

La segona part del teorema, que fa referència a la *diferència* de segments (i per diferència entenem el segment que s'obté al posar el menor a continuació del major però en sentit contrari, i.e. amb punts interiors comuns) es dedueix fàcilment de l'observació que $a < b + c$ implica $a - c < b$, on els signes $+$ i $-$ s'han d'interpretar ara com la *suma* i *diferència* de segments que acabem de definir. $\square$

Una de les definicions més importants, degut a la transcendència que posteriorment tindrià, és la següent:

DEFINICIÓ 1.9. *Dues rectes sense punts comuns es diuen paral·leles.*

TEOREMA 1.24. *Si la recta t talla les rectes r i s formant angles alterns interns iguals, llavors r i s són paral·leles.*

DEMOSTRACIÓ. Suposem que les rectes r i s es tallen en un punt O i siguin A i B els respectius punts d'intersecció amb t (fig. 1.32).

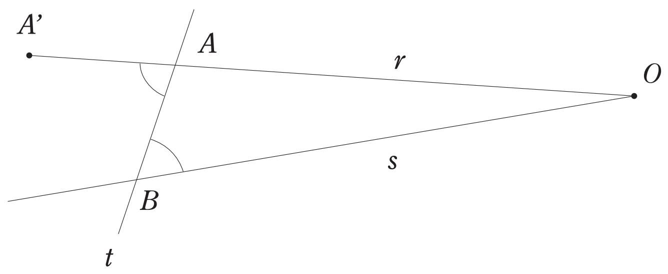

Figura 1.32

Sigui A' un punt arbitrari de r situat al costat oposat de O respecte a A. Per hipòtesi $\widehat{A'AB} \equiv \widehat{ABO}$, en contradicció amb el Teorema 1.19. □

TEOREMA 1.25. *Rectes perpendiculars a una tercera són paral·leles entre elles.*

DEMOSTRACIÓ. Conseqüència del teorema anterior. □

TEOREMA 1.26. *Per cada punt exterior a una recta hi passa almenys una recta paral·lela a aquesta.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui P el punt exterior a la recta r. Tracem la perpendicular s de P a r i a continuació la perpendicular t a s per P (Teoremes 1.17 i 1.18). Les rectes r i t són perpendiculars a s i per tant, pel teorema anterior, són paral·leles. □

S'ha de remarcar molt que aquest teorema demostra l'existència però no la unicitat de rectes paral·leles a una recta donada.

De fet, la unicitat no es desprèn pas dels tres grups d'axiomes que estem considerant, com es veurà més endavant.

1.7. Continuïtat

Degut a l'axioma II.1 les propietats dels nombres reals que fan referència a la relació d'ordre passen automàticament a ésser propietats dels punts de la recta. Una de les més importants és la següent:

Principi de Dedekind. *Si dividim el conjunt dels nombres reals $\mathbb{R}$ en dues classes no buides de manera que tot element de la primera classe sigui més petit que tot element de la segona classe, llavors o bé la primera classe té un element màxim o bé la segona classe té un mínim.*

Que la classe tingui un màxim (o un mínim) vol dir que hi ha un element d'aquesta classe més gran o igual (resp. més petit o igual) que tots els elements de la classe.

Utilitzant aquest principi, tot canviant nombres reals per punts de la recta, podem demostrar com a teoremes els axiomes del grup IV de Hilbert (axiomes de continuïtat).

Teorema 1.27 (Arquimedes). *Siguin AB i CD segments. Sobre la recta AB existeix un nombre finit de punts $A_1, \cdots, A_n$, situats de manera que A_i està entre A_{i-1} i A_{i+1} (amb $A = A_0$) tals que A_iA_{i+1} és congruent a CD per a tot i, i B està entre A i A_n.*

Demostració. Raonarem per l'absurd. Això vol dir que hi ha una successió infinita de segments congruents $AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv \cdots \equiv A_nA_{n+1} \equiv \cdots$ amb A_i entre A_{i-1} i A_{i+1} a l'interior del segment AB.

Suposem que a l'ordenació de la recta (per una de les bijeccions $\varphi\colon r \to \mathbb{R}$ de l'axioma II.1) $\varphi(A)$ precedeix $\varphi(B)$, i dividim els nombres reals en dues classes: la primera classe està formada per aquells punts anteriors a algun $\varphi(A_n)$. La segona pels restants. Aquestes clases compleixen les hipòtesis del principi de Dedekind, car:

i) Són no buides. En efecte, qualsevol $\varphi(A_i)$ és de la primera classe i $\varphi(B)$ és de la segona. A més tot nombre real està a una i només una d'aquestes classes.
ii) Tot element de la primera classe precedeix tot element de la segona.

Per tant existeix un punt C de la recta tal que $\varphi(C)$ és màxim de la primera classe o mínim de la segona. Clarament no pot ésser màxim de la primera i per tant és mínim de la segona.

Per III.1, existeix D anterior a C tal que $CD \equiv AA_1$. Com que $\varphi(D)$ ha d'ésser de la primera classe, existeix (per conservar φ la relació *estar entre*) A_n interior al segment CD, i llavors A_{n+1} ha d'estar a la dreta de C (conseqüència d'aplicar el Teorema 1.3 a les termes A_n, A_{n++1}, C i C, D, A_n) cosa que és una contradicció. □

Teorema 1.28 (Cantor). *Sobre una recta arbitrària donem segments A_iB_i, $i = 1, 2, \cdots$, cada un interior al precedent. Suposem que donat un segment arbitrari, existeix n tal que A_nB_n és més petit que el segment donat, llavors existeix un únic punt C de la recta tal que C pertany a A_iB_i, per a tot i.*

Demostració. Fixem una ordenació $\varphi\colon r \to \mathbb{R}$ a la recta i suposem que $\varphi(A_n)$ precedeix sempre $\varphi(B_n)$. Això ho podem fer canviant si cal A_i per B_i ja que els segments A_iB_i i B_iA_i són el mateix. Dividim els nombres reals en dues classes: la primera classe formada pels nombres que precedeixen algun $\varphi(A_n)$ (i també per tant $\varphi(A_{n+1}), \varphi(A_{n+2}), \cdots$) i la segona pels restants. Es compleixen les hipòtesis del principi de Dedekind, car:

i) Són no buides. En efecte, qualsevol $\varphi(A_i)$ pertany a la primera classe i qualsevol $\varphi(B_i)$ a la segona. A més tot nombre real està una i només una d'aquestes classes.
ii) Tot punt de la primera classe precedeix tot punt de la segona.

Per tant existeix un punt C de la recta tal que $\varphi(C)$ es mínim de la segona classe (és evident que la primera classe no té màxim). Per tant $\varphi(C)$ és posterior a tots els $\varphi(A_i)$ i anterior a tots els $\varphi(B_i)$. Això implica $C \in A_iB_i$ per a tot i. La unicitat és ara senzilla. □

1.8. Mesura de segments i mesura d'angles

DEFINICIÓ 1.10. *Suposem que a cada segment li fem correspondre un nombre real positiu de manera que*

i) *A algun segment OO' li correspon l'1.*
ii) *A segments congruents corresponen nombres iguals.*
iii) *Si B és un punt del segment AC i als segments AB i BC els hi corresponen respectivament els nombres a i b, llavors al segment AC li correspon el nombre $a+b$.*

Llavors aquest nombre que associem a cada segment es diu longitud del segment i el segment OO' es diu unitat de mesura.

A continuació veurem l'*existència* i *unitat* d'una longitud. Comencem per la unicitat. És a dir, hem de veure que només pot haver-hi una correspondència entre nombres i segments que compleixi les tres condicions de la definició anterior.

Observem primerament que, degut a iii), si $AB > CD$ llavors la longitud de AB és més gran que la longitud de CD. Per altra part, degut al Teorema 1.14, la unitat de mesura OO' es pot dividir per la meitat. Degut novament a iii) cada una d'aquestes meitats té longitud 1/2. Aquest procés es pot continuar i anem obtenint segments de longitud $1/2^2, 1/2^3, \cdots$

Considerem ara un segment arbitrari AB. Construïm sobre la recta AB, a partir de A i en el sentit de B, segments $AA_1, A_1A_2, \cdots$ congruents a OO'. Si algun dels punts A_n coincideix amb B, per iii), el segment AB té forçosament longitud n. Si cap A_i coincideix amb B existirà, pel principi d'Arquímedes (Teorema 1.27), un n tal que B estarà entre A_n i A_{n+1}. Això ja ens diu que la longitud de AB haurà de ser un nombre real comprès entre n i $n+1$.

Sigui ara P_1 el punt mig de A_nA_{n+1}. Segons que B coincideixi amb P_1, estigui entre A_n i P_1 o entre P_1 i A_{n+1} tindrem que la longitud de AB serà igual a $n+1/2$, estarà entre n i $n+1/2$ o entre $n+1/2$ i $n+1$ respectivament.

Això ja ens dóna la longitud de AB amb precisió 1/2. Continuant ara aquest procés de dividir per la meitat podrem calcular la longitud de AB amb error menor que $1/2^n$, és a dir amb precisió tan petita com vulguem. Això prova la unicitat de la longitud.

De fet, serà convenient pel que seguirà representar el valor de la longitud de AB per una expressió de la forma

$$n, n_1 n_2 n_3 \cdots$$

on n és un nombre enter que representa el nombre de vegades que la unitat de mesura cap a AB, n_1 és 1 o 0 segons si AB conté o no, a més de les n unitats, una meitat d'unitat, n_2 és 1 o 0 segons que AB contingui o no, a més de n unitats i n_1 meitats d'unitats, una quarta part d'unitat, etc.

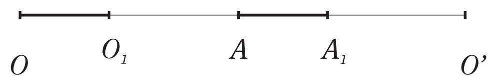

Figura 1.33

Passem ara a demostrar l'existència de la longitud, és a dir a demostrar que podem associar un nombre real a cada segment de manera que es compleixi i), ii) i iii).

Per a això associem a cada segment el nombre real que s'obté del procediment de mesura que acabem d'explicar. Això compleix i) per construcció i ii) com a conseqüència del Teorema 1.3.

Per a demostrar iii) utilitzarem dos lemes:

LEMA 1.1. *Donat un segment arbitrari PQ, sempre existeix un nombre natural n tal que en dividir la unitat de mesura en 2^n parts iguals s'obtenen segments menors que PQ.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui A el punt mig de la unitat de mesura OO'. Suposem que $OA > PQ$ i $AO' > PQ$ (sinó ja hauríem acabat). Existirà llavors un punt O_1 de OA tal que $PQ \equiv OO_1$, i un punt A_1 de AO' tal que $PQ \equiv AA_1$.

Fixem ara O_2 a partir de O_1 en la direcció de A tal que $O_1O_2 \equiv PQ$. Com que A esta entre O_1 i A_1, $O_1O_2 \equiv A_1A$ i $O_1A_1 \equiv A_1O_1$, tenim, pel Teorema 1.3 aplicat a les ternes A_1, A, O_1 i O_1, O_2, A_1, que O_2 esta entre O_1 i A_1, i per tant és anterior a O'.

Resumint, si en dividir la unitat de mesura en dues parts, cada una d'elles és més gran que PQ, en construir dos segments OO_1, O_1O_2 congruents a PQ, amb O_1 entre O i O_2, no arribem al punt O'.

Per tant, i raonant per l'absurd, si per tot n en dividir OO' en 2^n segments congruents O_iO_{i+1}, amb O_i entre O_{i-1} i O_i, $O = O_0$, tots ells són $\geq PQ$, repetint el segment PQ 2^n vegades a partir de O en direcció O', no superarem el punt O'. Això està en contradicció amb el principi d'Arquímedes i per tant el lema queda provat. □

Observeu que aquest lema implica en particular que l'expressió binària $n, n_1n_2, \cdots$ que representa la longitud d'un segment AB, no pot ésser mai infinita amb $n_i = 1$ a partir d'un cert lloc.

Això és molt important a l'hora de comparar expressions binaries obtingudes en el procés de mesurar segments: Si dues d'aquestes expressions binàries coincideixen fins a un cert ordre i en el següent la primera té un 0 i la segona 1, es pot afirmar que la primera és més petita que la segona (això no seria cert si consideréssim expressions binàries arbitràries, i.e. successions de zeros i uns identificant $n, n_1n_2 \cdots$ amb $n + \sum_i 1/2^{n_i}$, car llavors per exemple, $1,1100\cdots$ i $1,1011\cdots$ representen el mateix nombre).

Lema 1.2. *Siguin AB i CD segments tals que $AB < CD$. Si pel procés de mesura que estem considerant, al segment AB li correspon el nombre real a i al segment CD el nombre real c, llavors $a < c$.*

Demostració. Sigui B' un punt de CD tal que $AB \equiv CB'$. Hem de comprovar que en mesurar el segment CB' s'obté un nombre més petit que el que s'obté en mesurar CD.

Construïm a partir de C, en la direcció de D, segments $CC_1, C_1C_2, \cdots$ congruents a la unitat de mesura.

Per conveniència, en aquesta demostració considerarem que un punt pertany a un segment quan és interior o quan és l'extrem esquerre (amb l'ordenació de la recta de C a D).

Així si B' i D pertanyen a segments diferents del sistema $CC_1, C_1C_2, \cdots$ la part entera del nombre a serà diferent a la part entera del nombre c i així, utilitzant el comentari posterior al Lema 1.1, $a < c$. Si, al contrari, tots dos pertanyen a C_iC_{i+1} (i.e. tots dos tenen part entera i), dividim aquest segment per la meitat. Si B' i D estan llavors a meitats diferents, la primera xifra després de la coma a l'expressió binària de a serà un 0 i a la de b un 1. Pel mateix comentari $a < c$.

Continuant aquest procés s'arriba a $a < c$ sempre que B' i D no estiguin sempre en una mateixa de les dues meitats en què es va dividint el segment. Però això no pot passar, car estaria en contradicció amb el Lema 1.1. □

Ara ja podem retornar a la demostració de iii). Concretament hem de comprovar que si B és un punt interior del segment AC i a, b, c són els nombres obtinguts en mesurar AB, BC i AC, es compleix $a + b = c$.

Fixem un nombre natural n i construïm a partir de B en la direcció de A segments $BA_1, A_1A_2, \cdots$ congruents al segment que s'obté en dividir la unitat de mesura en 2^n parts iguals.

Pel Teorema 1.27 (Arquimedes) existeix k tal que A_k pertany al segment BA, o és igual a A, i A pertany al segment BA_{k+1}. Anàlogament es determinen punts C_j i C_{j+1}, posant en la direcció de C els segments $BC_1, C_1C_2, \cdots$ congruents a A_iA_{i+1} (fig. 1.34).

Es compleix que

$$\begin{aligned} BA_k &\leq AB < BA_{k+1} \\ BC_j &\leq BC < BC_{j+1} \\ A_kC_j &\leq AC < A_{k+1}C_{j+1}. \end{aligned}$$

Pel Lema 1.2, tenim doncs que

$$\begin{aligned} &\frac{k}{2^n} \leq a < \frac{k+1}{2^n} \\ &\frac{j}{2^n} \leq b < \frac{j+1}{2^n} \\ &\frac{k+j}{2^n} \leq c < \frac{k+j+2}{2^n} \end{aligned}$$

d'on es dedueix $\frac{k+j}{2^n} \leq a + b < \frac{k+j+2}{2^n}$. Restant d'aquí la darrera desigualtat s'obté

$$|a + b - c| < \frac{1}{2^{n-1}}\,.$$

Com que n és arbitrari, $a + b = c$, com volíem.

Això conclou la demostració de l'existència d'una longitud.

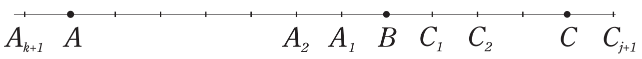

Figura 1.34

Definició 1.11. *Suposem que a cada angle li fem correspondre un nombre real positiu de manera que*

i) *A algun angle* $\widehat{O,O'}$ *li correspon el nombre* 1.
ii) *A angles congruents corresponen nombres iguals.*
iii) *Si la semirecta* l *és interior a l'angle* $\widehat{h,k}$ *i té l'origen en el seu vèrtex i si a* $\widehat{h,l}$ *i* $\widehat{l,k}$ *els coresponen els nombres* α *i* β*, llavors a* $\widehat{h,k}$ *li correspon el nombre* $\alpha+\beta$*.*

Aquest nombre que associem a cada angle es diu magnitud de l'angle i l'angle $\widehat{O,O'}$ *es diu unitat angular.*

De manera anàloga que en el cas de segments es pot demostrar l'existència i unicitat d'una magnitud d'angles.

Com a conseqüència del Teorema 1.28 (Cantor) tenim:

Teorema 1.29. *Per a tot nombre real positiu* a*, existeix un segment de longitud* a*.*

Demostració. Escrivim a en forma binària $n, n_1 n_2 \cdots$ Suposem primerament que a no es pot representar en forma binària finita. Això diu, en particular, que l'expressió $n, n_1 n_2 \cdots$ no pot tenir només uns a partir d'un lloc (vegeu el comentari posterior al Lema 1.1).

Considerarem una semirecta d'origen A i determinem segments AA_1, $A_1A_2, \cdots, A_nA_{n+1}$, congruents a la unitat de mesura.

Dividim llavors el darrer segment A_nA_{n+1} per la meitat. Sigui l_1 la meitat esquerra del segment si $n_1 = 0$ o la meitat dreta del segment si $n_1 = 1$.

Dividim ara l_1 per la meitat i denotem per l_2 la meitat esquerra del segment si $n_2 = 0$ o la meitat dreta del segment si $n_2 = 1$, etc.

Tenim així una successió de segments tal que cada un està contingut en el precedent i hi té un extrem comú. No obstant no pot passar que a partir d'un lloc tots els segments tinguin extrem comú (car l'expressió $n, n_1 n_2 \cdots$ no pot tenir només zeros o només uns a partir d'un lloc). Per tant la successió l_i admet una successió parcial $l_{k_1}, l_{k_2}, \cdots$ de segments cada un interior al precedent i tal que no existeix cap segment més petit que tots els termes de la succesió (cf. Lema 1.1).

Així doncs la successió l_{k_i} està en les hipòtesis del Teorema 1.28 (Cantor) i per tant existeix un únic punt B interior a tots el segments l_{k_i}. Però clarament B és llavors interior a tots els segments l_i i per tant el segment AB té longitud $n, n_1 n_2 \cdots = a$. Això demostra el teorema quan a no es pot expressar en forma binària finita.

Quan a es pot expressar en forma binària finita, l'extrem B del segment buscat serà un dels punts A_i anteriors o bé un dels punts mitjos considerats. Això demostra ja directament (sense utilitzar Cantor) el teorema. □

Una de les conseqüències immediates d'aquest teorema és que dins de cada segment existeixen punts que el divideixen en n parts iguals.

A l'hora d'elegir la unitat de mesura de segments no tenim cap segment privilegiat, cap segment que puguem distingir dels altres. No obstant això, a l'hora d'elegir la unitat de mesura d'angles sí que tenim un angle privilegiat, que podem distingir dels altres angles: l'angle recte. Podríem mesurar angles dient doncs a quants angles rectes és congruent. No obstant s'acostuma a procedir de la manera següent:

TEOREMA 1.30. *Suposem que per a una certa elecció de la unitat de mesura d'angles, l'angle recte té magnitud ω, llavors per a tot nombre real α, $0 < \alpha < 2\omega$, existeix un angle de magnitud α.*

DEMOSTRACIÓ. Anàloga a la del teorema anterior. □

Observeu que, per la construcció que hem fet, si dos segments tenen la mateixa longitud o dos angles la mateixa magnitud, són congruents. Per abús de llenguatge es diu també que són iguals. La suma de segments introduïda al Teorema 1.23 correspon exactament a considerar el segment que té per longitud la suma de les longituds del segments. També la suma d'angles correspon a considerar l'angle que té per magnitud la suma de les magnituds dels angles.

El que s'acostuma a fer llavors és elegir com a unitat de mesura d'angles, no l'angle recte, sinó un angle tal que l'angle recte tingui magnitud $\frac{\pi}{2}$. D'aquesta unitat se'n diu *radian*.

També és freqüent elegir com a unitat de mesura un angle tal que l'angle recte tingui magnitud 90. D'aquesta unitat se'n diu *grau*.

El teorema següent és degut a Legendre (1752-1833), que volia demostrar el cinquè postulat d'Euclides a base de demostrar una afirmacio equivalent: concretament que la suma dels angles interiors d'un triangle és exactament igual a dos rectes.

Com es veurà a partir dels nostres tres grups d'axiomes (que corresponen als quatre grups de Hilbert *incidència*, *estar entre*, *congruència* i *continuïtat*), no es pot demostrar que la suma dels angles d'un triangle és igual a la suma de dos angles rectes. Tan sols tenim:

TEOREMA 1.31. *La suma dels angles interiors d'un triangle és menor o igual que dos rectes.*

DEMOSTRACIÓ. Donat el triangle ABC construirem un altre triangle amb la mateixa suma d'angles i amb un angle més petit o igual que la meitat de l'angle A. Per això considerem el punt mig M del costat BC i el punt D sobre la recta AM tal que $AM \equiv MD$ (fig. 1.35).

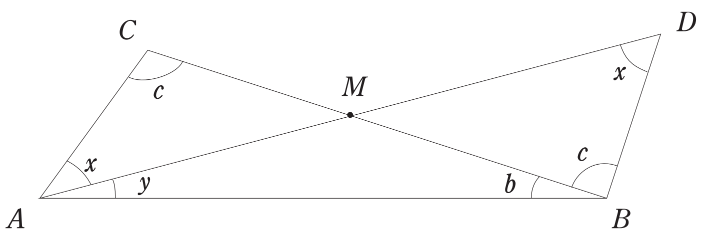

Figura 1.35

Pel criteri C.A.C., $\triangle AMC \equiv \triangle MDB$ i en particular $\widehat{ACB} \equiv \widehat{MBD}$ i $\widehat{CAM} \equiv \widehat{MDB}$.

Siguin a, b i c les magnituds dels angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ i $\widehat{C}$ del triangle inicial i siguin x la magnitud de $\widehat{CAD}$ i y la magnitud de $\widehat{DAB}$. (No importa quina és la unitat de mesura d'angles que s'hagi elegit).

Llavors tenim:

$$\begin{aligned}\text{Suma dels angles del triangle } ABC &= a+b+c = (x+y)+b+c = \\ &= x+y+(b+c) = \text{Suma dels angles del triangle } ADB.\end{aligned}$$

D'altra banda, com que $x+y=a$, un dels dos x o y, és més petit o igual que $a/2$. Per tant el triangle ADB té la mateixa suma d'angles que el triangle ABC i un angle, x o y, més petit o igual que la meitat de l'angle A.

Repetint aquest procés podem construir un triangle amb la mateixa suma d'angles que el triangle inicial i amb un angle tan petit com vulguem.

Suposem, per reducció a l'absurd, que la suma dels angles del triangle ABC és estrictament més gran que dos angles rectes. Tindríem $a+b+c=$ "2 rectes"$+\varepsilon$ on ε és un nombre real positiu i "2 rectes" significa la suma de les magnituds de dos angles rectes (π si hem elegit com a unitat el radian, 180 si hem elegit el grau, etc.).

Però llavors podríem construir, pel comentari anterior, un triangle amb un angle més petit que ε i amb suma d'angles igual a "2 rectes"$+\varepsilon$, i.e. dos dels angles d'aquest triangle sumarien més que "2 rectes", en contradicció amb el Teorema 1.19. $\square$

Molts altres teoremes es poden deduir d'aquests tres grups d'axiomes. Tots ells formen part de l'anomenada Geometria Absoluta, de la qual esperem haver donat una idea amb aquests 30 teoremes.

CAPíTOL 2

Geometria Euclidiana

2.1. El cinquè postulat

La Geometria Euclidiana és l'estudi de les conseqüències que s'obtenen en afegir als anteriors tres grups d'axiomes el cinquè postulat d'Euclides. Per raons històriques mantindrem la notació V per a aquest axioma.

AXIOMA V. *Si una recta talla dues rectes formant a un mateix costat angles que sumen menys de dos rectes, les rectes es tallen en el costat on aquesta suma és menor de dos rectes.*

Aquesta és la versió d'Euclides, però és més cómode utilitzar la següent formulació equivalent.

AXIOMA V'. *Donada una recta i un punt exterior a ella, existeix una única recta que passa per aquest punt i és paral·lela a la recta donada.*

Demostrem primerament que la primera formulació implica la segona. Per això sigui A un punt exterior a una recta donada a (fig. 2.1).

Sigui AB la perpendicular a a. Sigui a' la perpendicular a la recta AB pel punt A.

Pel Teorema 1.24, a i a' són paral·leles. Sigui ara r qualsevol recta per A diferent de a'. Demostrarem que r no pot ésser també paral·lela a a.

Com que r és diferent de a' ha de formar amb la recta AB un angle agut en algun dels dos semiplans determinats per aquesta recta.

Per tant a i r formen amb AB angles interiors a un costat de AB que sumen menys de dos rectes. Per tant a i r es tallen, cosa que demostra que la primera formulació implica la segona.

Recíprocament suposem ara que per a un punt exterior a una recta es pot traçar una única paral·lela i siguin a i b dues rectes tallades per una tercera

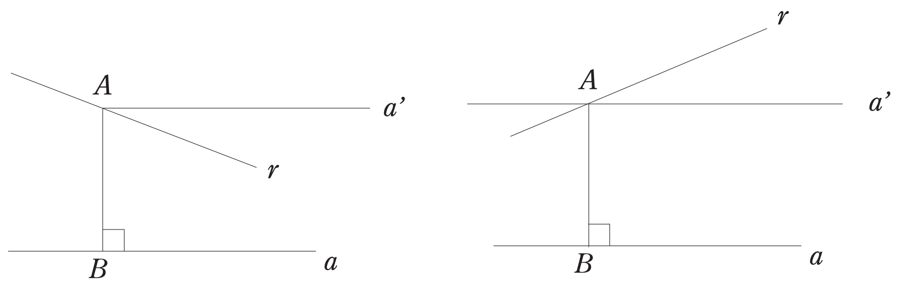

Figura 2.1

recta c formant a un mateix costat de c angles α i β que sumen menys de dos rectes (fig. 2.2).

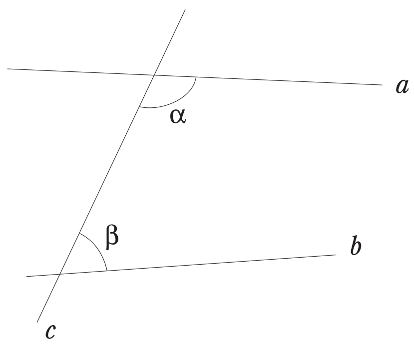

Figura 2.2

Sigui d una recta que passa pel punt d'intersecció de a i c i forma amb c, en el mateix costat de c abans considerat, un angle igual a l'angle β. Pel Teorema 1.24, d i b són paral·leles. Per tant, per la unicitat de la paral·lela, a i b es tallen. El fet que es tallin justament del costat on estan els angles α i β és conseqüència del Teorema 1.31.

Per tant les dues formulacions de l'axioma V són equivalents.

Teorema 2.1. *Si dues rectes paral·leles es tallen per una tercera recta, els angles alterns interns que es formen són iguals.*

Demostració. Conseqüència directa de l'axioma V i el Teorema 1.24. □

També es dedueix pel mateix tipus de raonament que si dues rectes són paral·leles i una tercera recta en talla una, llavors talla també l'altra, o que rectes paral·leles a una tercera són paral·leles entre elles, resultats que, com tots els d'aquest capítol, no són pas certs en Geometria Absoluta. Observeu però que, evidentment, tots els resultats de Geometria Absoluta són certs en Geometria Euclidiana.

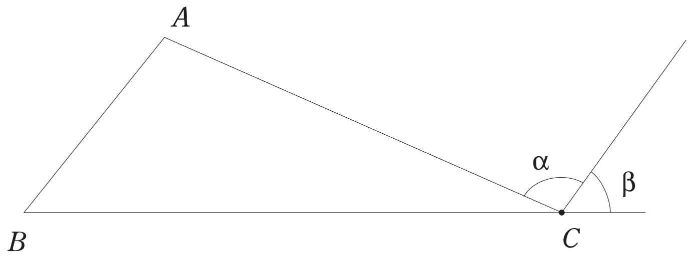

Figura 2.3

El Teorema 1.31 de Geometria Absoluta es pot millorar ara amb el següent teorema:

Teorema 2.2. *La suma dels angles interns d'un triangle és igual a dos rectes.*

Demostració. Donat el triangle ABC, tracem amb origen C la semirecta paral·lela al costat AB situada en el semiplà de BC que conté A (fig. 2.3). Siguin α i β els angles que forma aquesta semirecta amb les semirectes CA i amb la semirecta oposada a CB respectivament. Pel teorema anterior $\widehat{A} = \alpha$ i $\widehat{B} = \beta$. Per tant $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \alpha + \beta + \widehat{C} =$ "2 rectes". □

Per distància entre dos punts entenem la longitud del segment que determinen. Per distància entre una recta i un punt s'entén la longitud del segment de perpendicular del punt a la recta.

Teorema 2.3. *Rectes paral·leles són equidistants.*

Demostració. Siguin AB i CD segments perpendiculars a dues rectes paral·leles a, b amb A i C de a i B i D de b. (L'existència de tals segments es desprèn del Teorema 2.1) (fig. 2.4).

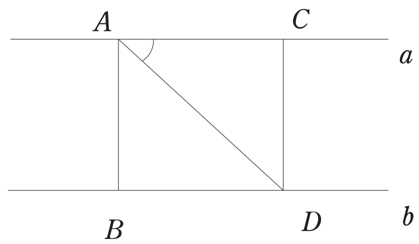

Figura 2.4

Llavors els triangles ABD i ACD són congruents. En efecte $\widehat{CAD} \equiv \widehat{BDA}$ per ésser alterns interns entre paral·leles (Teorema 2.1). També $\widehat{BAD} \equiv \widehat{ADC}$ per la congruència anterior i ésser $\widehat{BAC}$ i $\widehat{BDC}$ rectes. A més el costat AD és comú. Pel criteri A.C.A. $\triangle ABD \equiv \triangle ADC$. En particular $AB \equiv CD$. Com que els punts A i C són arbitraris les rectes paral·leles a i b són equidistants. $\square$

Teorema 2.4 (Tales). *Una recta paral·lela a un costat d'un triangle divideix els altres dos costats en segments proporcionals.*

Demostració. Sigui ABC el triangle donat i r la recta paral·lela a BC que talla els costats AB i AC en els punts D i E respectivament (fig. 2.5).

Hem de demostrar que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

En aquesta fórmula i en el que segueix identifiquem els segments amb llur longitud, és a dir que AD, per exemple, denota al mateix temps el segment AD i la longitud d'aquest segment.

Comencem pel cas particular en què $AD = DB$. Hem de demostrar llavors que $AE = EC$. Per això tracem la paral·lela a AC per D. Sigui F el punt d'intersecció amb BC (Axioma de Pasch). Del criteri A.C.A. es dedueix $\triangle ADE \equiv \triangle DBF$ i $\triangle DFE \equiv \triangle FEC$, d'on $AE \equiv DF$ i $DF \equiv EC$

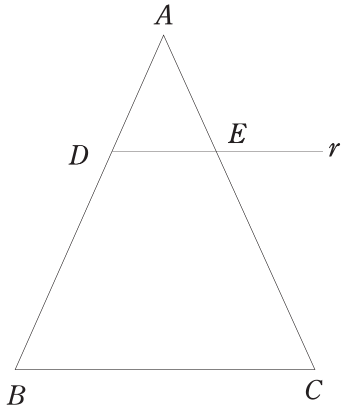

Figura 2.5

(o, equivalentment, $AE = DF$ i $DF = EC$ si interpretem AE, DF i EC com a longituds). Es diu sovint *paral·leles entre paral·leles són iguals.* Això prova el teorema en aquest cas particular.

Suposem ara que el quocient $\frac{AD}{DB}$ és un nombre racional p/q. Podem llavors dividir AB en $p+q$ segments congruents de manera que AD i DB quedin dividits respectivament en p i q d'aquests segments. Tracem rectes paral·leles a BC pels extrems d'aquests segments.

Aquestes rectes paral·leles determinen, per intersecció, $p+q$ segments sobre el costat AC. El cas particular estudiat anteriorment ens permet de concloure que aquests $p+q$ segments són congruents. Sigui a la seva longitud. Tenim

$$\frac{AD}{DB} = \frac{p}{q} = \frac{p \cdot a}{q \cdot a} = \frac{AE}{EC}$$

que prova el teorema en aquest cas.

Finalment si $\frac{AD}{DB}$ no és racional podem trobar una successió de punts D_n sobre AB amb límit D tals que $\frac{AD_n}{D_nB}$ és racional. Les paral·leles a BC pels punts D_n tallen AC en uns certs punts E_n. Pel cas particular anterior tenim:

$$\frac{AD_n}{D_nB} = \frac{AE_n}{E_nC}$$

que passant al límit ens dóna el resultat buscat. □

Un tema propi de la Geometria Euclidiana és el de les figures semblants.

DEFINICIÓ 2.1. *Dos triangles es diuen semblants si tenen els angles iguals i els costats corresponents proporcionals.*

TEOREMA 2.5. *Dos triangles que tenen dos angles iguals són semblants.*

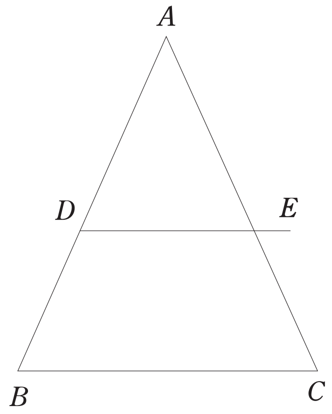

Figura 2.6

DEMOSTRACIÓ. Pel Teorema 2.2, aquests dos triangles tenen els tres angles iguals. Podem suposar que els dos triangles són ABC i ADE amb $\widehat{B} = \widehat{D}$ i $\widehat{E} = \widehat{C}$,(fig. 2.6).

Pel Teorema 1.23 les rectes DE i BC són paral·leles i podem per tant aplicar el Teorema 2.4 (Tales):

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

d'on es dedueix

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}\,.$$

Per tant sols falta estudiar el quocient $\frac{DE}{BC}$. Per això tracem una paral·lela a AB per E. Aplicant Tales des de C a aquesta nova situació obtenim

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

que acaba la demostració. □

Quan un triangle té un angle recte direm que és un triangle rectangle. El costat oposat a aquest angle rep el nom d'hipotenusa i els altres costats es diuen catets.

Teorema 2.6 (Pitàgores). *En tot triangle rectangle es compleix que la hipotenusa al quadrat és igual a la suma dels quadrats dels catets.*

Demostració. Sigui ABC el triangle rectangle donat i sigui A l'angle recte. Tracem la perpendicular de A a la recta BC (altura del triangle). Sigui D el punt d'intersecció. Pel Teorema 2.5 resulta que els triangles ABC i DBA són semblants (tots dos són rectangles i tenen un angle agut comú). Per tant els costats corresponents són proporcionals:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}\,. \tag{2.1}$$

Anàlogament els triangles ABC i ADC son també semblants. Per tant:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}\,. \tag{2.2}$$

De (2.1) i (2.2) es dedueix $AB^2 + AC^2 = BC \cdot BD + BC \cdot DC = BC(BD + DC) = BC^2$. □

També es pot deduir fàcilment que $BC \cdot AD = AB \cdot AC$ d'on s'obté la relació:

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AD^2}$$

que involucra els catets i l'altura del triangle.

2.2. Introducció de coordenades

A continuació passarem de la Geometria a l'Àlgebra.

Fixem d'una vegada per totes dues rectes que es tallin perpendicularment en un punt O. D'aquestes dues rectes en direm *sistema de referència cartesià* i del punt O en direm *origen de coordenades.* D'una de les rectes en direm eix d'abcisses i de l'altra eix d'ordenades.

Sigui P un punt del pla. Tracem la paral·lela a l'eix d'ordenades que passa per P. Aquesta recta talla l'eix d'abcisses en un punt P_x. Tracem també la paral·lela a l'eix d'abcisses que passa per P. Aquesta recta talla l'eix d'ordenades en un punt P_y (fig 2.7).

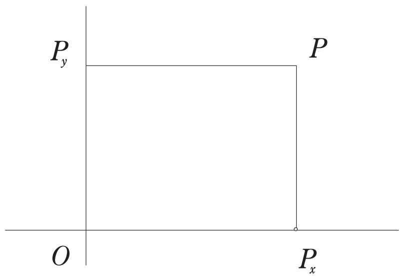

Figura 2.7

Direm llavors que P té coordenades (x, y), on x és la longitud del segment OP_x i y és la longitud del segment OP_y. Escriurem també $P = (x, y)$. Si P pertany a l'eix d'abcisses direm que té coordenades (x, O), on x és la longitud del segment OP, i si pertany a l'eix d'ordenades direm que té coordenades (O, y), on y és la longitud del segment OP.

D'aquesta manera s'estableix una correspondència bijectiva entre el conjunt de punts del pla i el conjunt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, producte cartesià de nombres reals.

Teorema 2.7. *Les rectes tenen equacions lineals.*

DEMOSTRACIÓ. Observem primerament que els eixos d'abcisses es poden descriure com

$$\text{Eix d'abcisses } = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\}$$

$$\text{Eix d'ordenades } = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0\}$$

i per tant estan donats per equacions lineals en les variables x, y.

Pel Teorema 2.3 les rectes paral·leles a l'eix d'abcisses tenen equació:

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = c\}$$

i les paral·leles a l'eix d'ordenades

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = c\}$$

on c és un nombre real que representa justament la distància entre la recta donada i l'eix corresponent.

Per tant, totes dues estan donades també per equacions lineals.

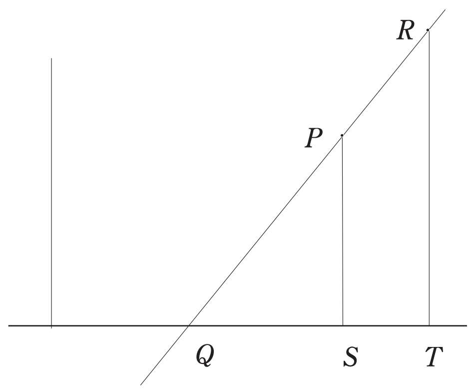

Figura 2.8

Sigui ara r una recta del pla no paral·lela als eixos de coordenades. Prenem $P = (a,b)$ un punt arbitrari de r i $Q = (c,0)$ el punt d'intersecció de r amb l'eix d'abcisses. Es tracta ara d'agafar un punt arbitrari $R = (x,y)$ d'aquesta recta i veure quina relació hi ha entre la x i la y.

Denotem per S i T els punts d'intersecció amb l'eix d'abcisses de les rectes paral·leles a l'eix d'ordenades pels punts P i R respectivament.

Pel Teorema 2.5 els triangles PQS i RQT són semblants i per tant

$$\frac{RT}{QT} = \frac{PS}{QS}$$

com que $RT = y$, $PS = b$, $QT = x - c$ i $QS = a - c$ tenim

$$y(a - c) - bx + bc = 0.$$

Així doncs les coordenades (x, y) d'un punt qualsevol de la recta compleixen una equació lineal. També es pot comprovar que, recíprocament qualsevol parella de nombres reals que compleixen l'anterior equació pertany a la recta r. $\square$

A partir d'aquí els problemes de la Geometria Euclidiana es poden traduir a problemes d'Àlgebra. Per exemple, saber si dues rectes es tallen és saber si un cert sistema d'equacions lineals és compatible, etc.

La fórmula de la distància entre dos punts $P = (a, b)$ i $Q = (c, d)$ s'obté fàcilment a partir del Teorema de Pitàgores:

$$d(P, Q) = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}\,.$$

A partir d'aquí es poden obtenir certes fórmules com la distància entre un punt i una recta, etc.

No continuarem però aquest camí que constitueix el contingut ordinari dels cursos de Geometria Analítica

2.3. Consistència de la Geometria Euclidiana. Model cartesià

Un problema que es presenta sempre que es desenvolupa una teoria matemàtica a partir d'uns axiomes és el de la consistència. Un sistema d'axiomes es diu consistent quan a partir d'aquests axiomes no es poden arribar a demostrar mai, per procediments lògics rigurosos, dues afirmacions tals que una sigui contradictòria amb l'altra.

Per a saber si un sistema d'axiomes donat és consistent o no, no es pot pas recórrer a tots els teoremes que se'n dedueixen (poden ésser infinits!) i comparar-los per comprovar que no n'hi ha dos de contradictoris.

El que es fa és construir una realització dels objectes i relacions que apareixen en els axiomes, i.e. elegir conjunts concrets i relacions concretes que compleixen els axiomes. Llavors tot teorema que es dedueixi dels axiomes és també cert en aquesta realització. Per tant, si en aquesta realització o *model* no hi ha contradiccions tampoc hi poden ser en el sistema axiomàtic.

En el cas de la Geometria Euclidiana el que es fa es construir un model aritmètic dels axiomes I, II, III, V. Així queda clar que si l'aritmètica és consistent la Geometria euclidiana també ho és.

Inspirats en el paràgraf anterior prenem el següent model:

Com a conjunt de *punts* prenem el producte cartesià $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ del conjunt de nombres reals per ell mateix.

Com a conjunt de *rectes* prenem les equacions lineals de la forma $ax + by + c = 0$. O, equivalentment, les ternes de nombres reals (a, b, c), amb a o b diferents de zero, identificant ternes proporcionals, i.e. les ternes (a, b, c) i $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ on λ és un nombre real diferent de zero, es consideren iguals.

Direm que el punt (x, y) *pertany a* la recta (a, b, c) si i només si $ax + by + c = 0$.

Sigui $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ tres punts de la recta (a, b, c). Suposem $b \neq 0$. Direm que (x_2, y_2) *està entre* (x_1, y_1) i (x_3, y_3) si $x_1 < x_2 < x_3$ o $x_1 > x_2 > x_3$.

Si pel contrari $b = 0$, direm que (x_2, y_2) *està entre* (x_1, y_1) i (x_3, y_3) si $y_1 > y_2 < y_3$ o $y_1 > y_2 > y_3$.

Direm que un segment AB és *congruent* a un altre segment $A'B'$ si existeix una transformació ortogonal que porta A a A' i B a B'.

Per transformació ortogonal entenem una aplicació de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ que transforma el punt (x, y) en el punt (x', y') donat per

$$x' = ax - by + c$$

$$y' = bx + ay + d$$

o per

$$x' = ax + by + c$$

$$y' = bx - ay + d$$

amb $a^2 + b^2 = 1$.

La motivació de considerar aquestes aplicacions prové del fet que el concepte de congruència tradueix el de moviment rígid, és a dir, el d'aplicació que conserva la distància. Aquesta és la propietat essencial de les equacions anteriors, però no entrarem en detalls, car ara sols volem donar un model.

Es pot comprovar que les transformacions ortogonals porten punts situats sobre una semirecta a punts situats també sobre una semirecta. En particular porten angles a angles, cosa que permet definir la darrera relació dels axiomes:

Direm que l'angle $\widehat{h,k}$ és *congruent* a l'angle $\widehat{h',k'}$ si existeix una transformació ortogonal que porta la semirecta h a h' i la semirecta k a k'.

Ara sols resta comprovar que es compleixen els grups d'axiomes I, II, III i V, cosa que no farem aquí però que pot ésser un bon exercici.

CAPíTOL 3

Geometria Hiperbòlica

3.1. L'axioma de Lobatxevski

La Geometria Hiperbòlica és l'estudi de les conseqüències que s'obtenen en afegir als tres primers grups d'axiomes, d'incidència, ordre i congruència, l'axioma de Lobatxevski que consisteix essencialment en la negació del cinquè postulat d'Euclides.

AXIOMA V'. *Existeixen una recta r i un punt P que no pertany a la recta tals que per P passen al menys dues rectes que no tallen r.*

NOTA. També es pot negar el V postulat dient: *Existeixen una recta r i un punt P que no pertany a r tals que tota recta per P talla r.* Aquí no ho fem així, car aquest enunciat és contradictori amb el Teorema 1.25. No obstant això, aquest enunciat, modificant lleugerament els primers axiomes, dóna lloc a l'anomenada Geometria El·líptica que no tractem aquí.

De manera anàloga al que hem fet a la Geometria Absoluta i a la Geometria Euclidiana podríem ara anar deduint nous resultats a partir d'aquests quatre grups d'axiomes. No obstant això, no serà aquest el camí que seguirem, sinó que ens plantejarem directament el problema de la consistència i donarem un model euclidià on es verifiquen tots els axiomes dels grups I, II, III i a més l'axioma V'. Així si la Geometria Euclidiana és consistent (cf. capítoI 2 §2.3) la Geometria Hiperbòlica també.

Històricament aquest ha estat un problema important ja que alguns resultats de la Geometria Hiperbòlica semblen contradir la nostra intuïció sobre la naturalesa de les rectes.

Posteriorment obtindrem alguns resultats i fórmules de la Geometria Hiperbòlica a partir del model construït. De fet tots ells es podrien deduir amb una mica més d'esforç directament dels axiomes i són per tant vàlids en qualsevol model de la Geometria Hiperbòlica, però aquest punt (relacionat amb la *completitud* d'un sistema d'axiomes) no el discutirem aquí.

3.2. Inversions

Per a la construcció del model que donarem en el proper paràgraf, serà de gran utilitat el coneixement d'un tipus especial d'aplicacions del pla euclidià en ell mateix, anomenades inversions.

Situem-nos doncs en el pla euclidià.

Observem primerament que donada una circumferència de centre O i radi r i un punt M diferent de O, existeix un únic punt M' sobre la semirecta d'origen O que conté M tal que

$$OM \cdot OM' = r^2.$$

Aquest punt M' es diu *invers* de M respecte la circumferència donada.

Si M és exterior a la circumferència, podem construir M' traçant primerament la tangent a la circumferència pel punt M i a continuació la perpendicular a la recta OM pel punt de tangència, com indica la figura 3.1.

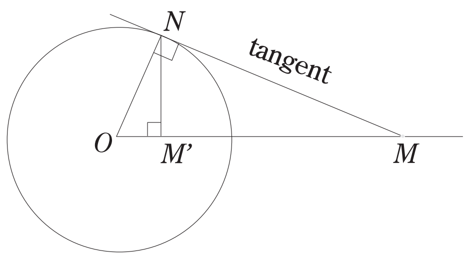

Figura 3.1

Com que els triangles ONM' i ONM són semblants (cf. Teorema 2.5) tenim

$$\frac{OM}{r} = \frac{r}{OM'}$$

o equivalentment $OM \cdot OM' = r^2$.

Per a simplificar l'exposició quan un punt M' sigui simètric d'un punt M respecte a una recta r direm que M' és invers de M respecte a r. Així quan parlem d'inversions poden ésser respecte a una circumferència o respecte a una recta. Per tal de no anar fent la distinció pensarem les rectes com a circumferències de radi infinit.

Les següents propietats de les inversions són evidents.

a) Si M és l'invers de M' llavors M' és l'invers de M. Així tota inversió coincideix amb la seva aplicació inversa.

b) Tota inversió aplica l'interior de la circumferència sobre l'exterior i recíprocament. (De moment el centre de la circumferència no té imatge).

c) Tot punt de la circumferència coincideix amb el seu invers.

A continuació obtindrem una representació analítica de les inversions. Per això introduïm en el pla euclidià un sistema de coordenades ortogonal i posem en correspondència cada punt M amb el nombre complex $z = x + iy$, on (x, y) són les coordenades de M.

En el que segueix se suposa que el lector està familiaritzat amb els nombres complexos. Recordem tan sols que el conjugat de $z = x + iy$ és el nombre complex $\bar{z} = x - iy$, i la norma de z és el nombre real positiu $\|z\| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Sigui ara C una circumferència de centre l'origen de coordenades i radi r. L'equació de la inversió respecte a C és

$$OM \cdot OM' = r^2$$

o equivalentment

$$\|z\| \cdot \|z'\| = r^2$$

on $z = x + iy$ amb x, y coordenades de M i $z' = x' + iy'$ amb x', y' coordenades de M'.

Si expressem z i z' de forma polar tenim

$$\begin{aligned} z &= pe^{i\alpha} & \bar{z} &= pe^{-i\alpha} \\ z' &= p'e^{i\alpha} & \bar{z}' &= p'e^{-i\alpha} \end{aligned}$$

Així $z' \cdot \bar{z} = pp' = \|z\| \cdot \|z'\| = r^2$.

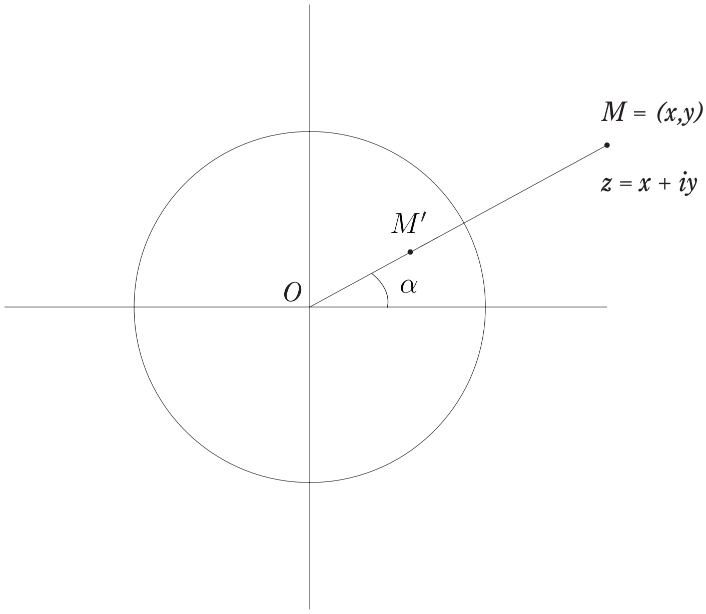

Figura 3.2

Com que z' és el transformat per la inversió del punt z, l'equació buscada és

$$z' = \frac{r^2}{\bar{z}} \tag{3.1}$$

que en coordenades reals correspon a

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}$$

$$y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} \,.$$

Per a trobar l'expressió analítica d'una inversió respecte a una circumferència de centre arbitrari P i radi r introduïm un sistema auxiliar de coordenades amb origen P i eixos paral·lels als eixos inicials.

L'equació de la inversió respecte als nous eixos esta donada per

$$Z' = \frac{r^2}{\overline{Z}} \tag{3.2}$$

on Z i Z' són les noves coordenades d'un M i del seu invers M'.

La relació entre les coordenades de M i M' en els dos sistemes de coordenades és

$$z = Z + P$$

$$z' = Z' + P.$$

Així (3.2) es transforma en

$$z' = P + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{P}} = \frac{P\bar{z} - P\bar{P} + r^2}{\bar{z} - \bar{P}}\,. \tag{3.3}$$

Per a calcular la inversió respecte a una recta (circumferència de radi infinit) observem que si la recta és l'eix de les x's llavors $z' = \bar{z}$. Per tant, si la recta és una recta per l'origen que forma un angle φ amb l'eix de les x's, per trobar la imatge d'un punt z, primer el girem $-\varphi$ respecte l'origen, després fem la inversió $z' = \overline{z}$, i tornem a girar un angle φ. Així tindrem

$$z' = e^{i\varphi}\,\overline{e^{-i\varphi}\,z} = e^{2\varphi i}\,\overline{z}.$$

I si la recta és arbitrària l'equació de la inversió és

$$z' = e^{2\varphi i}\,\bar{z} + a \tag{3.4}$$

on a és una constant complexa.

Per tant l'expressió analítica d'una inversió o té la forma (3.3) o té la forma (3.4). Per a reduir les dues expressions a una de sola escriurem l'equació general de les inversions com

$$z' = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta} \tag{3.5}$$

on α, β, γ, δ representen nombres complexos, car escollint adequadament els seus valors, podem representar qualsevol inversió. Per exemple, el cas (3.3) correspon a $\alpha = P$, $\gamma = 1$, $\beta = r^2 - P\overline{P}$, $\delta = -P$ i el cas (3.4) a $\gamma = 0$, $\delta = 1$, $\alpha = e^{2\varphi i}$, $\beta = a$.

Observeu que en ambdós casos el nombre $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$, anomenat discriminant, és diferent de zero.

Quan més endavant ens restringim a inversions respecte a circumferències de centre sobre la recta $y = 0$, els coeficients α, β, γ, δ són reals (fórmula (3.3)).

Suposem ara que efectuem dues inversions successives respecte a circumferències arbitràries. Si la primera aplica z a z' i la segona z' a z'' tenim, d'acord amb (3.5), que

$$z' = \frac{\alpha_1 \bar{z} + \beta_1}{\gamma_1 \bar{z} + \delta_1}$$

$$z'' = \frac{\alpha_2 \bar{z}' + \beta_2}{\gamma_2 \bar{z}' + \delta_2}$$

conjugant la primera i substituint a la segona obtenim

$$z'' = \frac{(\alpha_1\alpha_2 + \gamma_2\beta_1)z + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\delta_2)}{(\alpha_2\gamma_1 + \delta_1\gamma_2)z + (\gamma_1\beta_2 + \delta_1\delta_2)} .$$

Per tant l'expressió general del producte de dues inversions es pot escriure com

$$z'' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{3.6}$$

per unes certes constants complexes α, β, γ, δ.

Es pot comprovar que el discriminant de l'aplicació producte d'inversions és el producte dels discriminants.

Si ara efectuéssim una tercera inversió el resultat es podria escriure per una expressió del tipus (3.5) i si efectuéssim llavors una quarta inversió, per una expressió del tipus (3.6) etc.

Resumint, si una aplicació del pla complex en ell mateix és producte d'un nombre parell d'inversions, llavors es pot escriure com

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

i si és producte d'un nombre imparell d'inversions es pot escriure com

$$z' = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}$$

on α, β, γ, δ són constants complexes, que compleixen $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Proposició 3.1. *La inversió d'una circumferència és una circumferència.*

Demostració. Com el traslladat d'una circumferència és una circumferència, només cal demostrar la proposició per inversions respecte a circumferències centrades a l'origen. Una tal inversió té equacions

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}$$

$$y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}$$

per tant la circumferència $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ es transforma, en substituir els valors de x i y pels que s'obtenen de les equacions anteriors, i.e.

$$x = r^2 \, \frac{x'}{x'^2 + y'^2}$$

$$y = r^2 \, \frac{y'}{x'^2 + y'^2}$$

en

$$Ar^4 + Br^2 x' + Cr^2 y' + D(x'^2 + y'^2) = 0.$$

Per tant les coordenades dels punts que són inversos de punts d'una circumferència compleixen també l'equació d'una circumferència (una recta si $D = 0$, però recordem que estem considerant també circumferències de radi infinit). $\square$

Noteu que el centre de la primera, no va pas al centre de la segona.

Proposició 3.2. *Si una aplicació que representa el producte d'un nombre parell d'inversions deixa tres punts fixos, és la identitat.*

Demostració. Una tal aplicació es pot escriure com

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

per a certs nombres complexos α, β, γ, δ.

Els punts fixos compleixen $z' = z$, és a dir

$$z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

o, equivalentment
$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha)z - \beta = 0.$$

El tres punts fixos són arrels d'aquest polinomi de segon grau, per tant aquest polinomi és idènticament nul. Per tant $\gamma = \beta = 0$ i $\delta = \alpha$. A més $\alpha \neq 0$, car les inversions compleixen $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Així $z' = z$ per tot z, i l'aplicació considerada és efectivament la identitat. □

Proposició 3.3. *Si una aplicació que representa el producte d'un nombre imparell d'inversions deixa tres punts fixos, llavors és una inversió respecte a la circumferència que passa per aquests tres punts.*

Demostració. Sigui $z' = f(z)$ l'aplicació donada. Sigui $z'' = g(z')$ la inversió respecte a la circumferència determinada per aquests tres punts. Llavors l'aplicació $z'' = g(f(z)) = h(z)$ està formada pel producte d'un nombre parell d'inversions i té tres punts fixos. Per tant és la identitat. Així $gf(z) = z$ o equivalentment $f(z) = g^{-1}(z)$. Però $g^{-1}(z) = g(z)$ i per tant $z' = f(z) = g(z)$, cosa que acaba la demostració. □

Finalment donem sense demostració la següent proposició (cf. [1]).

Proposició 3.4. *Si dues circumferències es tallen, l'angle que formen en el punt comú és igual a l'angle que formen les circumferències transformades per una inversió.*

3.3. Consistència de la Geometria Hiperbòlica. Model de Poincaré

Com a conjunt de *punts* prendrem el semiplà $y > 0$, és a dir el subconjunt de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ format per aquells punts amb segona coordenada estrictament positiva.

Com a conjunt de *rectes* prendrem les semicircumferències euclidianes de centre sobre la recta $y = 0$, contingudes en el semiplà $y > 0$, i les rectes verticals, és a dir les rectes d'equació $x = c$, on c és un nombre real. Com abans, per tal de no anar parlant de semicircumferències i rectes considerarem aquestes últimes (les $x = c$) com semicircumferències de radi infinit.

Definim a continuació les relacions que s'han d'establir entre punts i rectes.

Direm que a un punt A *pertany a* la recta r si el punt euclidià A pertany a la semicircumferència euclidiana r.

Siguin A, B i C tres punts d'una recta r. Direm que B està *entre* A i C si el punt B està entre A i C en el sentit de la Geometria Euclidiana.

Per a ésser més precisos, si A, B i C estan sobre una determinada semicircumferència els podem projectar des del centre sobre una recta euclidiana paral·lela a $y = 0$ i obtenir tres punts A', B' i C'. Llavors dir que B està entre A i C en el sentit euclidià vol dir simplement que B' està entre A' i C' (el concepte de *estar entre* es tenia a la Geometria Euclidiana tan sols per a punts alineats).

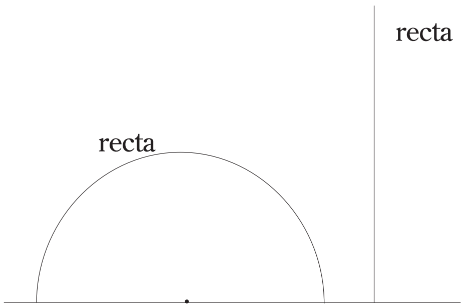

Figura 3.3

Aquestes dues relacions compleixen els axiomes dels grups I, II. En efecte, per a comprovar I.1 prenem dos punts diferents A i B. Si tenen la mateixa abscisa, la recta euclidiana que determinen és de la forma $x = c$ i és per tant una recta hiperbòlica. Si tenen diferent abscisa, la perpendicular en el punt mig del segment AB talla la recta $y = 0$ en un punt P que és el centre de la semicircumferència euclidiana que passa per A i B. Per tant dos punts diferents determinen una única recta hiperbòlica.

L'Axioma I.2 es compleix trivialment.

Per a comprovar II.1 observeu que tota semicircumferència C de centre un punt $P = (\alpha, 0)$ i radi r es pot parametritzar per

$$x = a + r \cos a$$
$$y = r \sin a$$

en variar α entre 0 i π radians.

Per tant podem definir una bijecció entre C i $\mathbb{R}$ per $f(x,y) = \tan(\alpha - \frac{\pi}{2})$.

Així, quan α varia entre 0 i π, $\tan(\alpha - \pi/2)$ varia entre $-\infty$ i ∞ i com que és una aplicació creixent es conserva la relació d'ordre euclidià.

Per a les rectes $x = c$, la bijecció pot ésser simplement $f(x,y) = \log y$, car en variar y entre 0 i ∞, $\log y$ varia entre $-\infty$ i ∞ de manera creixent.

Finalment, l'Axioma II.2 (Pasch) correspon a dir en geometria euclidiana que donat un triangle corbat ABC, format per arcs de semicircumferències, una semicircumferència c que no passa per A, B ni C, que talla l'arc AB, llavors talla un i només un dels arcs BC, AC (fig. 3.4).

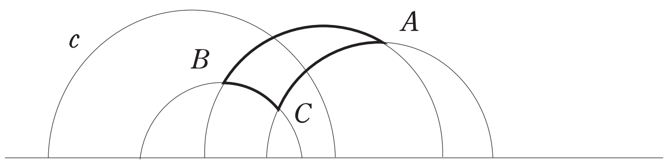

Figura 3.4

Aquest resultat es desprèn del fet de que en geometria euclidiana, degut a la continuïtat de la funció distància, es pot demostrar que si una circumferència c passa per un punt interior i un altre exterior d'una altra circumferència c', llavors c i c' es tallen. Així, en el nostre cas, si C és interior a la circumferència c, la circumferència determinada per A i C té un punt interior i un exterior a c i en conseqüència es tallen. Si C és exterior a c, la circumferència determinada per B i C té un punt interior i un exterior a c i en conseqüència es tallen. Anàlogament es veu la unicitat. Això prova l'axioma de Pasch.

Com a conseqüència de complir-se aquests axiomes (cf. capítol 1, §1.3) podem parlar de segment i angle. Sovint parlarem de segment hiperbòlic i angle hiperbòlic per a distingir-los dels segments i angles euclidians.

Podem definir ara la darrera relació: la congruència de segments i angles.

Direm que un segment hiperbòlic AB és *congruent* al segment hiperbòlic $A'B'$ si existeix una successió d'inversions realitzades respecte a circumferències de centre sobre la recta $y = 0$ i rectes verticals, és a dir, respecte a les rectes hiperbòliques, tal que aplica l'arc de semicircumferència euclidià AB sobre l'arc de semicircumferència euclidià $A'B'$.

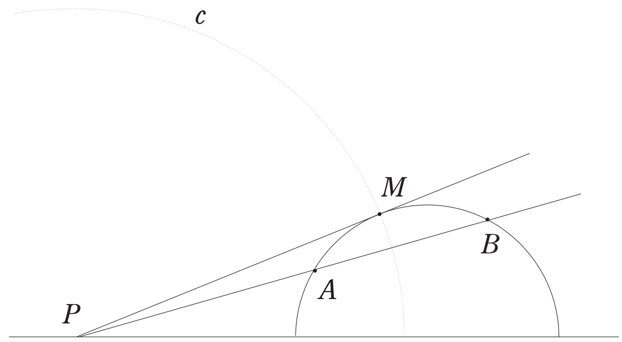

Figura 3.5

Anàlogament l'angle hiperbòlic $\widehat{h,k}$ és *congruent* a l'angle hiperbòlic $\widehat{h',k'}$ si existeix una successió d'inversions, realitzades respecte a les rectes hiperbòliques, tal que aplica els costats del primer angle sobre els costats del segon.

Observeu que aquest tipus d'inversions transformen el semiplà $y > 0$ en ell mateix i rectes hiperbòliques en rectes hiperbòliques.

Degut a la Proposició 3.4, angles congruents en el sentit d'aquesta definició són congruents també en el sentit de la Geometria Euclidiana. Per contra, arcs (segments hiperbòlics) congruents en el sentit anterior no són en general congruents en el sentit de la Geometria Euclidiana. Això és degut al fet que les inversions conserven angles però no les dimensions lineals de les figures.

Observació. Les inversions que estem considerant no són sinó simetries respecte a una recta (en el sentit hiperbòlic). En efecte, sigui AB un segment hiperbòlic i sigui P la intersecció de la recta euclidiana AB amb $y = 0$ (fig. 3.5).

Tracem des de P la tangent PM a l'arc AB. Es pot veure llavors que $PM^2 = PA \cdot PB$. Aquesta igualtat implica que A és l'invers de B respecte a la circumferència c de centre P i radi PM. Com que M és un punt fix per aquesta inversió, el segment hiperbòlic MB es transforma en el segment hiperbòlic MA. Per tant MA i MB són segments hiperbòlics congruents. En particular M és el punt mig hiperbòlic del segment AB. A més l'angle format per c i l'arc MB es transforma en l'angle format per c i l'arc MA. Com que són adjacents i iguals són, per definició, rectes.

Per tant, des del punt de vista hiperbòlic, el punt A és el simètric del punt B respecte a la recta c.

Si la recta euclidiana AB és paral·lela a $y = 0$ (no existeix el punt P) el paper jugat per la semicircumferència c el fa la recta euclidiana perpendicular al segment AB en el punt mig euclidià i val el mateix raonament.

Demostrem ara que aquestes relacions de congruència compleixen els axiomes del grup III.

L'Axioma III.1 diu essencialment que sobre cada semirecta es pot tracar un únic segment congruent a un segment donat amb origen a l'origen de la semirecta.

Sigui doncs AB un segment i A^* un punt origen d'una semirecta m (fig. 3.6).

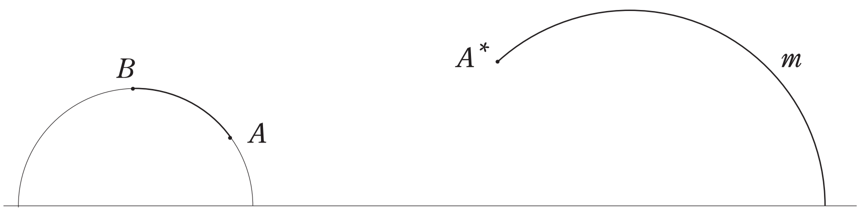

Figura 3.6

Pel procediment explicat a l'observació anterior tracem la perpendicular n en el punt mig del segment AA^*. Per simetria respecte a n el segment AB es transforma en un cert segment A^*B' (fig. 3.7).

Tracem ara la bisectriu b de l'angle format per $B'A^*$ i la semirecta m.

A continuació fem una simetria respecte a b. El punt A^* és fix i, per conservar angles, la semirecta d'origen A^* que conté B' es transforma en la semirecta m. En particular B' es transforma en un punt B^* sobre m.

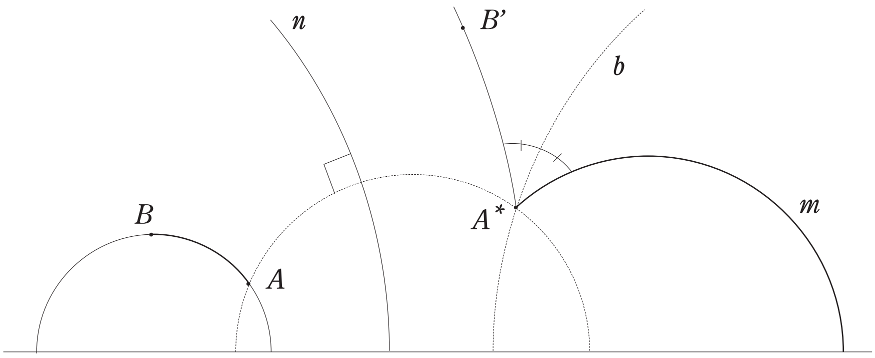

Figura 3.7

Així, donat AB i m, ha existit un punt B^* sobre m tal que $AB \equiv A^*B^*$, car A^*B^* és el transformat de AB pel producte de dues simetries, la primera respecte a n i la segona respecte a b.

Per a demostrar la unicitat de B^* suposem que existís un altre punt B_1^* sobre la semirecta m tal que $AB \equiv A^*B_1^*$. Per definició, això vol dir que podem transformar A^*B^* en $A^*B_1^*$ per un producte d'inversions. Però aquest producte d'inversions té A^* com a punt fix i els punts d'intersecció de la circumferència determinada per m amb $y = 0$ fixos també. Observeu que no es poden permutar entre ells. Per tant és la identitat o inversió respecte a aquesta circumferència. En ambdós casos $B^* = B_1^*$ com volíem.

Finalment hem de comprovar que $AB \equiv AB$, però això és evident car la identitat es pot pensar com a producte d'inversions (una per la seva inversa).

L'Axioma III.2 es compleix trivialment.

Per a demostrar l'Axioma III.3 hem de comprovar que si A, B i C estan alineats i A', B' i C' també estan alineats i si $AB \equiv A'B'$ i $BC \equiv B'C'$, llavors $AC \equiv A'C'$.

Per això sigui φ el producte d'inversions que porta AB sobre $A'B'$. Demostrarem que aquesta mateixa φ ja porta C sobre C' (i per tant $AC \equiv A'C'$).

El punt $\varphi(C)$ és un punt de la recta $A'B'$ que està al mateix costat de B' que C' (les inversions conserven la relació d'estar entre mig).

Com que $BC \equiv B'C'$, $BC \equiv \varphi B\, \varphi C$ i $\varphi B = B'$ es dedueix, utilitzant III.1 i III.2, que $\varphi C = C'$. Això demostra III.3.

L'axioma III.4 diu que tot angle es pot aplicar de manera única a un costat donat d'una semirecta donada. Per a veure això, sigui $\widehat{h,k}$ un angle de vèrtex O i h' una semirecta d'origen O'. Fem primerament una simetria respecte a la perpendicular en el punt mig del segment OO' (en el sentit hiperbòlic) (fig. 3.8).

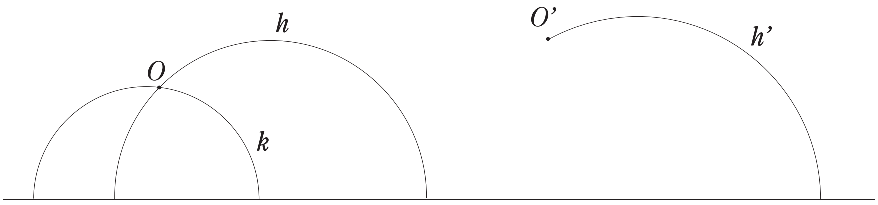

Figura 3.8

Això transforma $\widehat{h,k}$ en un cert angle $\widehat{h'',k''}$ de vèrtex O'. A continuació fem una altra simetria respecte a la bisectriu de $\widehat{h',h''}$. Això transforma $\widehat{h'',k''}$ en $\widehat{h',k'}$ i aquest darrer angle és per construcció congruent a $\widehat{h,k}$. Si k' està en el costat donat dels dos determinats per h' ja hem acabat. Si no, apliquem una simetria respecte a h' i obtenim el resultat desitjat.

Com es veu, la idea és exactament la mateixa que a la comprovació de l'Axioma III.1. La unicitat de III.4 es demostraria també de manera anàloga a com s'ha fet a III.1. Les altres afirmacions de III.4 es comproven fàcilment.

Per a comprovar III.5 hem de veure que donades dues ternes de punts no alineats A, B, C i A', B', C' si $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ i $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$, llavors $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ i $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$. Per això, sigui φ el producte d'inversions que porta l'angle $\widehat{BAC}$ sobre l'angle $\widehat{B'A'C'}$. Així $\varphi(A) = A'$, i també per III.1, $\varphi(B) = B'$ i $\varphi(C) = C'$, cosa que acaba la demostració.

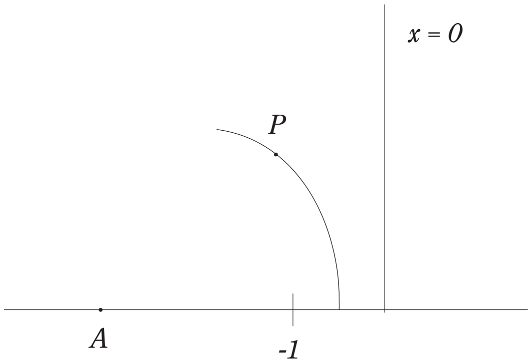

Figura 3.9

Finalment observeu que l'axioma de Lobatxevski és aquí evident, car donada una semicircumferència del semiplà $y > 0$ i un punt que no pertanyi a aquesta semicircumferència, hi ha una infinitat de semicircumferències que passen pel punt i no tallen la semicircumferència donada.

Per exemple, si la recta hiperbòlica considerada és la $x = 0$ i $P = (-1, 1)$ és el punt donat, qualsevol semicircumferència de centre $A = (a, 0)$ amb $a \leq -1$ que passi per P és una recta hiperbòlica que no talla la recta donada.

Per tant hem construït uns conjunts i unes relacions entre els seus elements fent servir només la Geometria Euclidiana de manera que en aquest nou model, anomenat model de Poincaré, es compleixen tots els axiomes dels grups I, II i III i l'axioma V'. Això demostra, com havíem dit, que si la Geometria Euclidiana és consistent, la Geometria Hiperbòlica també.

3.4. Teoria no euclidiana de les paral·leles

En aquest paràgraf donarem el concepte de rectes paral·leles segons Lobatxevski. No és tan senzill com en el cas euclidià i necessitarem alguns comentaris previs.

Comencen amb el següent teorema.

TEOREMA 3.5. *Si l'axioma V' (de Lobatxevski) es compleix per a algun punt i alguna recta, llavors es compleix per a tot punt i tota recta. A més per aquest punt passen, no solament dues, sinó infinites rectes que no tallen la recta donada.*

No en donem la demostració rigorosa a partir dels axiomes I, II,III i V', però ja hem comentat al paràgraf anterior la validesa d'aquests fets en el model de Poincaré.

A diferència del que passa en Geometria Euclidiana, on rectes que no es tallen es diuen paral·leles, en Geometria Hiperbòlica tan sols es diran paral·leles dues de les infinites rectes que pasen pel punt i no tallen la recta donada.

Per a concretar això, prenem una recta r i un punt P exterior a r. Tracem la perpendicular PQ des de P a r. La recta PQ divideix el pla en dues parts que podem anomenar dreta i esquerra (fig. 3.10).

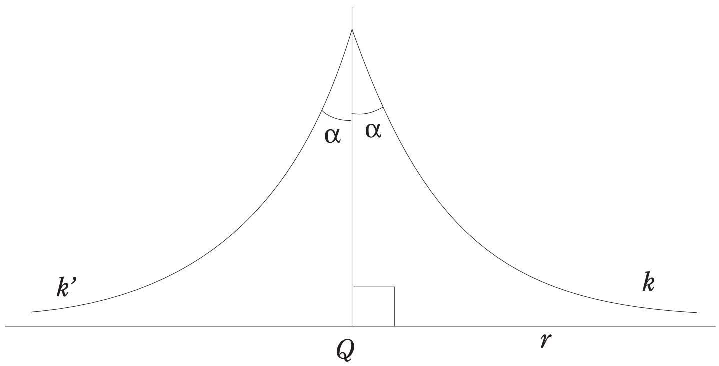

Figura 3.10

La part dreta de cada recta que passa per P i no talla r forma amb PQ un cert angle β. Sigui α l'extrem inferior d'aquests angles (i.e. α és més petit o igual que tots els angles del conjunt considerat però per a cada nombre real positiu ε, $\alpha + \varepsilon$ ja és més gran que algun angle del conjunt).

Llavors és fàcil veure que la recta k que passa per P i forma un angle α amb PQ no talla r (cf. Teorema 1.2). D'aquesta recta k se'n diu precissament *paral·lela a r per la dreta* des de P. També es diu que és recta frontera del conjunt de rectes per P que no tallen r.

El concepte de *paral·lela per l'esquerra* es defineix anàlogament.

Observeu però que la recta k' simètrica de k respecte PQ (el concepte de simetria és de la Geometria Absoluta) no talla r, i que, a més, és frontera de la part esquerra de totes les rectes que passen per P i no tallen r. És a dir, k' és justament la paral·lela per l'esquerra. Per simetria, l'angle α entre k i PQ coincideix amb l'angle entre k' i PQ. D'aquest angle se'n diu *angle de paral·lelisme del segment PQ*.

El paper representat per P el representa també qualsevol punt de la recta k. Concretament tenim:

Teorema 3.6. *Si k és paral·lela a r des de P, llavors per a qualsevol punt Q de k, la recta és frontera del conjunt de rectes que passen per Q i no tallen r. És a dir, si k és paral·lela a r des de P, llavors k és paral·lela a r des de Q, per tot punt Q de k.*

Tampoc no donarem la demostració d'aquesta proposició a partir dels axiomes, però el que sí que farem serà comentar-ne la validesa en el model de Poincaré.

Per això representem primerament les paral·leles per la dreta i per l'esquerra en el model. Suposem que r està representada per una semicircumferència de centre sobre la recta $y = 0$ que la talla en els punts A i B. Suposem P un punt exterior a r.

Es veu fàcilment que la paral·lela a r des de P per la dreta és justament la semicircumferència k de centre sobre $y = 0$ que passa pels punts P i B (fig. 3.11).

Observeu que les rectes hiperbòliques r i k no es tallen, car el punt d'intersecció B de les dues semicircumferències no pertany al model de Poincaré (aquest està format pels punts $y > 0$ i B està sobre la recta $y = 0$).

La recta $y = 0$ rep el nom de *recta de l'infinit* i per això es diu que rectes paral·leles són les que es tallen a l'infinit.

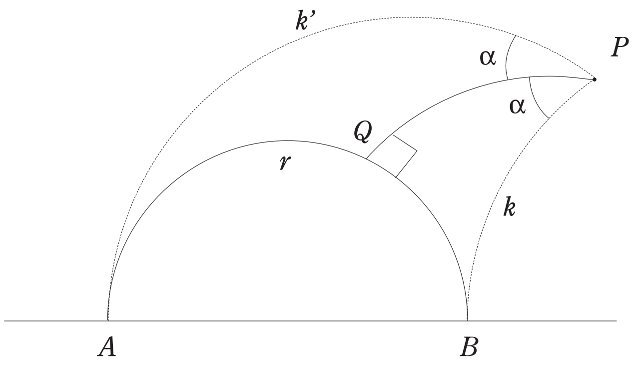

Figura 3.11

La simetria que hem fet abans de k respecte a PQ correspon ara a la inversió respecte a la circumferència determinada per P i Q. Aquest punt Q es pot calcular pels procediments de la Geometria Absoluta (cf. Teorema 1.17). Així la circumferència k es transforma en una altra circumferència k' que passa per P (car P és fix) i forma un angle α amb PQ (car les inversions conserven els angles). A més, com que PQ és perpendicular a r, el punt B va a parar al punt A i aquest a B. Així k' passa per A, o dit d'una altra manera, talla r a l'infinit. Per tant aquesta recta k' és justament la paral·lela a r per l'esquerre des de P.

Amb aquesta interpretació de recta tangent com a circumferència tangent a l'infinit queda clar que sigui quin sigui el punt P que elegim sobre la circumferència k, aquesta és frontera de les circumferències que passen pel punt i no tallen r. Així, igual que ha passat amb el Teorema 3.5, el Teorema 3.6 es fa evident en el model.

Això permet donar la definició de paral·leles segons Lobatxevski.

Definició 3.1. *Direm que la recta k és paral·lela a la recta r si k és frontera del conjunt de rectes que passen per un punt de k i no tallen r.*

Es pot veure, usant el que alguns autors anomenen lema d'Aristòtil, que la relació de paral·lelisme és simètrica i.e. si la recta m és paral·lela a la recta l llavors l és paral·lela a m.

Per acabar vegem una propietat importat de l'angle de paral·lelisme.

TEOREMA 3.7. *L'angle de paral·lelisme queda totalment determinat per la distància del punt a la recta.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui r una recta i P un punt exterior a r. Tracem la perpendicular PQ des del punt P a la recta r i una paral·lela k a la recta r pel punt P (fig. 3.12).

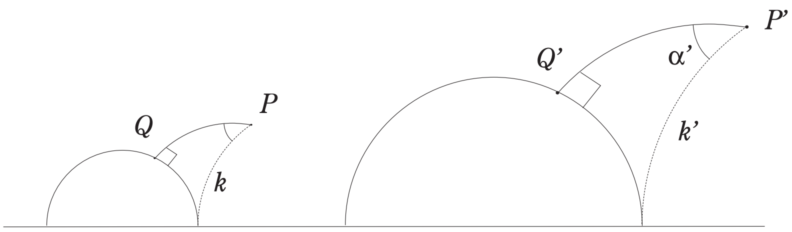

Figura 3.12

Sigui ara r' una altra recta i P' un punt exterior a r'. Tracem la perpendicular $P'Q'$ des del punt P' a la recta r' i una paral·lela k' a la recta r' pel punt P'.

Suposem que els segments PQ i $P'Q'$ són congruents. Hem de demostrar que l'angle α entre PQ i k coincideix amb l'angle α' entre $P'Q'$ i k'.

Suposem $\alpha < \alpha'$. Per l'axioma III.4 existeix una semirecta d'origen P', del mateix costat que k' respecte a $P'Q'$, que forma un angle α amb $P'Q'$. Pel fet d'ésser α' l'extrem inferior dels angles que les rectes que no tallen r' formen amb $P'Q'$, la semirecta anterior ha de tallar r' en un cert punt R'. Per l'Axioma III.1 existeix un punt R sobre r, determinant a partir de Q en el sentit del paral·lelisme, tal que $QR \equiv Q'R'$.

Així, pel criteri C.A.C., els triangles PQR i $P'Q'R'$ són congruents. En particular $\widehat{QPR} = \alpha$ i la recta PR ha de coincidir amb k. Però això implicaria que r i k es tallen en el punt R en contradicció amb el fet d'ésser r i k paral·leles. Això acaba la demostració. $\square$

El teorema 3.7 permet pensar que tenim definida una funció $\Pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, anomenada funció de Lobatxevski, donada per

$$\Pi(x) = \alpha$$

on α és l'angle de paral·lelisme de qualsevol segment de longitud x.

L'estudi d'aquesta funció a partir dels axiomes és laboriós. Nosaltres la calcularem explícitament en el paràgraf següent utilitzant el model de Poincaré.

En particular veurem que és injectiva. Així si dos segments tenen el mateix angle de paral·lelisme són congruents.

Això permet descriure amb precisió una unitat de mesura de longituds.

En efecte, el lligam entre longituds i angles donat per la funció de Lobatxevski i el fet de que en geometria absoluta hi ha un angle privilegiat, l'angle recte, permet privilegiar un segment. Per exemple, podem agafar com unitat de mesura aquell segment, únic llevat de congruència, que té angle de paral·lelisme $\frac{\pi}{4}$ (la meitat d'un angle recte). Recordem que l'angle de paral·lelisme és sempre menor que $\frac{\pi}{2}$ (si utilitzem radians). Tindrem llavors

$$\Pi(1) = \frac{\pi}{4}\,.$$

En geometria hiperbòlica la suma dels angles d'un triangle és més petita que π (no només $\leq$ com havíem vist al teorema 1.31). Per això, també podríem prendre com unitat de mesura el costat d'un triangle equilàter d'angle $< \frac{\pi}{3}$. Gauss, en carta a Gerlin, 11 d'abril 1816, diu: *podriem agafar com unitat de mesura el costat d'un triangle equilàter amb angle* $59°59'59''99999$.

3.5. Relacions mètriques fonamentals de la Geometria Hiperbòlica

L'objectiu d'aquest paràgraf és obtenir una fórmula explícita per a l'angle del paral·lelisme. Tot i que la podríem deduir a partir dels axiomes ens limitarem a donar-la en el model de Poincaré.

Per això, el primer que necessitem és tenir una expressió per a la longitud d'un segment en el model.

Comencem per recordar que el producte d'inversions es pot escriure com

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

ó
$$z' = \frac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}$$
amb $\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$, segons si es tracta d'un nombre parell o imparell d'inversions.

Aquestes fórmules tenen el petit inconvenient que per al punt $z = -\frac{\delta}{\gamma}$ no estan definides.

Per a evitar això s'introdueix un punt auxiliar ∞, anomenat punt de l'infinit, i s'amplia el domini de definició de les anteriors fórmules a tot $\mathbb{C}$ dient que el punt $z = -\frac{\delta}{\gamma}$ va a parar a ∞.

L'aplicació inversa de l'anterior té l'expressió
$$z' = \frac{\delta z' - \beta}{-\gamma z' + \alpha} \qquad \text{ó} \qquad z' = \frac{\delta\bar{z}' - \beta}{-\gamma\bar{z}' + \alpha}$$
de manera que ara és el punt $\frac{\alpha}{\gamma}$ qui no té imatge. Com abans convenim que la seva imatge per l'aplicació inversa sigui ∞.

Resumint si φ representa un producte d'inversions pensarem que és una bijecció de $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ donada per
$$\varphi(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \quad \left(\text{ó } \varphi(z) = \frac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}\right)$$
$$\varphi\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) = \infty$$
$$\varphi(\infty) = \frac{\alpha}{\gamma}$$

Si $\gamma = 0$, l'ampliació de φ a $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ és de fet innecessària, però per coherència l'ampliarem agafant $\varphi(\infty) = \infty$.

Si es tracta d'una sola inversió és el centre de la circumferència el punt que va a ∞.

Si u, v, s i t són quatre nombres complexos, escriurem
$$(u,v,s,t) = \frac{u-s}{u-t} : \frac{v-s}{v-t}$$
i direm que (u,v,s,t) és la raó doble de u, v, s i t. Observeu que l'ordre és important. Així si $(u,v,s,t) = \lambda$ llavors $(v,u,s,t) = \frac{1}{\lambda}$, $(u,v,s,t) = \frac{1}{\lambda}$, etc.

Si un dels quatre punts és l'infinit la raó doble està donada per les fórmules que s'obtindrien de l'anterior per un procés formal de pas al límit.

$$(u, v, s, \infty) = \frac{u - s}{v - s} \qquad (u, v, \infty, t) = \frac{v - t}{u - t}$$

$$(u, \infty, s, t) = \frac{u - s}{u - t} \qquad (\infty, v, s, t) = \frac{v - t}{v - s}$$

PROPOSICIÓ 3.8. *Les transformacions del tipus* $z' = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, *conserven la raó doble. És a dir* $(u, v, s, t) = (u', v', s', t')$. *Les transformacions del tipus* $z' = \frac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, *conjuguen la raó doble. És a dir* $(u, v, s, t) = \overline{(u', v', s', t')}$.

DEMOSTRACIÓ. És un simple càlcul que farem únicament en el cas que cap dels punts involucrats sigui l'infinit. Si un d'ells u, v, s, t, u', v', s' i t' és l'infinit es pot adaptar el mateix càlcul sense majors problemes.

Observem que

$$u' - s' = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma u + \delta)(\gamma s + \delta)}(u - s)$$

i que

$$u' - t' = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma u + \delta)(\gamma t + \delta)}(u - t)$$

Per tant

$$\frac{u' - s'}{u' - t'} = \frac{u - s}{u - t} \cdot \frac{\gamma t + \delta}{\gamma s + \delta}.$$

Anàlogament

$$\frac{v' - s'}{v' - t'} = \frac{v - s}{v - t} \cdot \frac{\gamma t + \delta}{\gamma s + \delta}$$

d'on es dedueix directament $(u, v, s, t) = (u', v', s', t')$. La segona part de la proposició és ara conseqüència immediata del fet que la raó doble dels conjugats és el conjugat de la raó doble. □

PROPOSICIÓ 3.9. *Siguin* u, v, *dos punts del semiplà de Poincaré. Siguin* s *i* t *els punts d'intersecció amb la recta* $y = 0$ *de la semicircumferència que representa la recta hiperbòlica* u, v.

Llavors (u, v, s, t) *és un nombre real estrictament positiu.*

DEMOSTRACIÓ. Remarquem primerament que si els punts u, v tenen la mateixa part real, la semicircumferència a què fem referència és una recta ortogonal a $y = 0$. En aquest cas prendrem t com el punt de l'infinit (fig. 3.13).

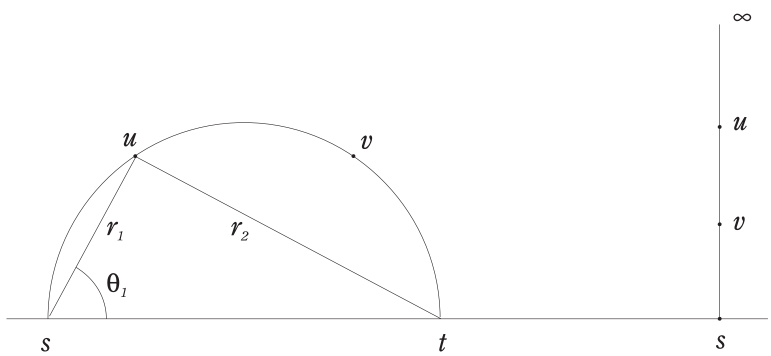

Figura 3.13

Comencem la demostració quan u i v estan efectivament sobre una circumferència. Escrivim els complexos $u - s$ i $u - t$ en forma polar

$$u - s = r_1 e^{iw_1}$$
$$u - t = r_2 e^{iw_2}$$

Com que l'angle $\widehat{sut}$ és recte, $\omega_2 - \omega_1 = \frac{\pi}{2}$ i per tant

$$\frac{u - s}{u - t} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Anàlogament si $v - s = r_3 e^{i\omega_3}$ i $v - t = r_4 e^{i\omega_4}$ tenim

$$\frac{v - s}{v - t} = \frac{r_3}{r_4}\, e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

d'on $(u, v, s, t) = \frac{r_1}{r_2} : \frac{r_3}{r_4}$ que és un nombre real estrictament positiu.

Observeu que $r_1/r_2 = \cot\omega_1$ i $r_3/r_4 = \cot\omega_3$.

Quan t és el punt de l'infinit $(u, v, s, t) = \frac{u-s}{v-s}$ però tant $u - s$ com $v - s$ són llavors imaginaris purs. Així

$$(u, v, s, t) = \frac{r_1}{r_3}$$

que torna a ésser un nombre real estrictament positiu. □

Al §1.8 del CapítoI 1 hem vist que hi ha una única manera d'associar una longitud als segments. Concretament hem vist que hi ha una única manera d'associar un nombre real positiu a cada segment de manera que

i) A algun segment OO' li correspongui l'1.

ii) A segments congruents corresponguin nombres iguals.

iii) Si B és un punt del segment AC i als segments AB i BC els corresponen respectivament els nombres a i b, llavors al segment AC li correspon el nombre $a + b$.

Això ens permetrà de donar una fórmula explícita per a la distància entre dos punts en el model de Poincaré.

TEOREMA 3.10. *La distància hiperbòlica entre dos punts u, v del semiplà de Poincaré està donada per*

$$\rho\,(u, v) = R\,|\ln(u, v, s, t)|$$

on R és una constant positiva que quedarà determinada en elegir la unitat de mesura (per això es diu també factor d'escala) i s i t estan definits com a la proposició anterior.

DEMOSTRACIÓ. Observem primerament que $\rho\,(u, v) > 0$. En efecte, a la Proposició 3.9 hem demostrat que $(u, v, s, t) = \frac{r_1}{r_2} : \frac{r_3}{r_4}$. Pero r_1/r_2 és diferent de r_3/r_4 ja que representen tangents d'angles diferents. Per tant $(u, v, s, t) \neq 1$ i $\rho\,(u, v) > 0$.

Així tan sols hem de comprovar que es compleixen les tres condicions anteriors.

i) Si fixem un punt u_0, la funció d'una variable $\rho\,(u_0, v)$ és evidentment contínua. El punt v varia a la semicircumferència entre u i t. En aquests valors extrems tenim $\lim\limits_{v \to u_0} \rho\,(u_0, v) = \lim\limits_{v \to u_0} R\,|\ln(u_0, v, s, t)| = 0$ car la raó doble tendeix a 1. I, amb la notació de la Proposició 3.9, $\lim_{v \to t} \rho(u_0, v) = \lim_{v \to t} R \left| \ln(\frac{r_1}{r_2} : \frac{r_3}{r_4}) \right| = \infty$ car quan $v \to t$, $r_4 \to 0$ i per tant la raó doble tendeix a 0. Com que la funció contínua $\rho(u_0, v)$ pren els valors 0 i ∞, existeix almenys un punt v_0 on

$$\rho(u_0, v_0) = 1.$$

(Un cop elegim el parell u_0, v_0 podem determinar R per la fórmula

$$R\,|\ln(u_0, v_0, s_0, t_0)| = 1).$$

ii) Si el segment uv és congruent al segment $u'v'$ vol dir que hi ha un producte d'inversions que transformen la semicircumferència que representa la recta hiperbòlica uv en la semicircumferència que representa la recta hiperbòlica $u'v'$. En particular aquest producte d'inversions transforma els punts u, v, s, t, en els punts u', v', s', t' on s, t i s', t' són les respectives interseccions de les semicircumferències amb la recta $y = 0$ (fig. 3.14).

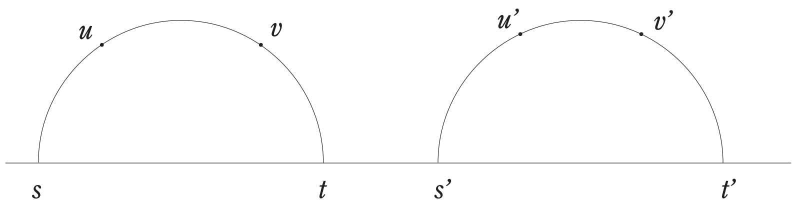

Figura 3.14

Aquest producte d'inversions esta representat per una aplicació de la forma

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{ó}$$

$$z' = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}\,.$$

Aquestes aplicacions conserven o conjuguen la raó doble. Com que en el nostre cas la raó doble és un nombre real (i per tant igual al seu conjugat), tenim que

$$(u, v, s, t) = (u', v', s', t')$$

que implica $\rho\,(u, v) = \rho\,(u', v')$, com volíem.

iii) Sigui w un punt interior al segment hiperbòlic uv. Directament a partir de la definició de raó doble es té que

$$(u, v, s, t) = (u, w, s, t) \cdot (w, v, s, t).$$

A més (u, w, s, t) i (w, v, s, t) són tots dos més grans que 1 o tots dos més petits que 1. En efecte, si diem α, β i γ dels angles que formen les rectes euclidianes, ut, wt i vt amb $y = 0$, resulta que (fig. 3.15).

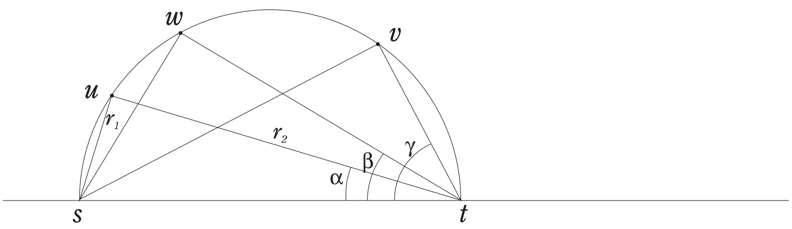

Figura 3.15

$$(u, w, s, t) = \tan\alpha / \tan\beta$$
$$(w, v, s, t) = \tan\beta / \tan\gamma.$$

Si $\alpha < \beta < \gamma$ les dues raons dobles són més petites que 1.

Si $\alpha > \beta > \gamma$ les dues raons dobles són més grans que 1.

Per tant $\ln(u, v, s, t) = \ln(u, w, s, t) + \ln(w, v, s, t)$ i els dos logaritmes de la dreta són tots dos positius o tots dos negatius.

Per tant $|\ln(u, v, s, t)| = |\ln(u, w, s, t)| + |\ln(w, v, s, t)|$ d'on $\rho\,(u, v) = \rho\,(u, w) + \rho\,(w, v)$, com volíem. $\square$

TEOREMA 3.11. *L'angle de paral·lelisme està donat per la fórmula*

$$\Pi(x) = 2 \cdot \arctan e^{-\frac{x}{R}}.$$

DEMOSTRACIÓ. Segons el Teorema 3.7 per a calcular $\Pi(x)$ podem calcular l'angle de paral·lelisme d'una recta arbitrària des d'un punt arbitrari que estigui a distància x de la recta.

Per simplificar els càlculs prenem una recta r representada per una semicircumferència de radi euclidià igual a 1. Sigui u un punt a distància x de la semicircumferència situat sobre la recta perpendicular a $y = 0$ que passa pel centre de r (fig. 3.16).

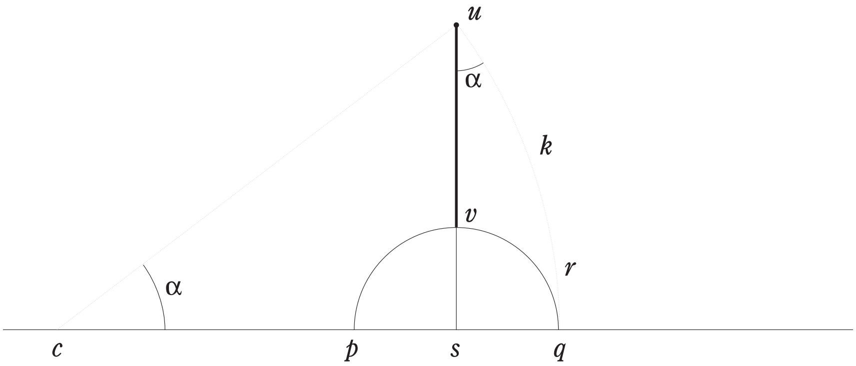

Figura 3.16

Siguin v i s els punts d'intersecció d'aquesta recta amb r i $y = 0$ respectivament. Siguin p i q els punts de l'infinit de r. La tangent per la dreta a r des de u és la semicircumferència k que té el centre c sobre $y = 0$ i passa per u i q.

Tenim que

$$x = \rho\,(u, v) = R\,|\ln(u, v, s, \infty)| = R\left|\ln \frac{u-s}{v-s}\right| = R\,|\ln h| = R \cdot \ln h$$

on h és la distància euclidiana entre u i s (la distància euclidiana entre v i s és 1).

Com que angles amb els costats perpendiculars són iguals resulta que l'angle de paral·lelisme α en el punt u, és a dir l'angle entre les rectes euclidianes uv i la tangent a k en el punt u, és igual a l'angle $\widehat{ucs}$.

Com que el triangle euclidià ucq és isòsceles, tenim

$$\widehat{cqu} = \frac{\pi - \alpha}{2} \,.$$

Si considerem el triangle squ tenim

$$h = \tan \widehat{squ} = \tan \widehat{cqu} = \cot \frac{\alpha}{2} \,.$$

Per tant $x = R \cdot \ln \left(\cot \frac{\alpha}{2}\right)$, o equivalentment

$$\Pi(x) = \alpha = 2 \arctan e^{-\frac{x}{R}} \qquad \square$$

Com ja havíem comentat abans aquesta funció $\Pi(x)$ estableix un lligam entre longituds de segments i magnituds d'angles.

Aquest lligam fa que en Geometria Hiperbòlica no existeixin figures semblants.

Quan fixem la unitat de mesura, la constant R queda determinada. Per exemple, si agafem com unitat de mesura el segment amb angle de paral·lelisme $\frac{\pi}{4}$ tenim l'equació

$$\Pi(1) = \alpha = 2 \arctan e^{-\frac{1}{R}} = \frac{\pi}{4}$$

que permet aïllar R.

Obtenim $R = \ln(1 + \sqrt{2})$, valor usat per Gauss en Carta a Gerlin de 16 de març 1819.

De fet si dos triangles tenen els angles iguals també tenen els costats iguals, és a dir, que són congruents.

Concretament si ABC és un triangle hiperbòlic i denotem per α, β i γ les magnituds dels angles A, B i C i per a, b i c les longituds hiperbòliques dels costats BC, AC i AB respectivament, es pot demostrar laboriosament a partir dels càlculs anteriors (cf. [**1**]) que

$$\cosh\frac{a}{R} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

$$\cosh\frac{b}{R} = \frac{\cos\beta + \cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha}$$

$$\cosh\frac{c}{R} = \frac{\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

és a dir, el coneixement de α, β i γ implica el coneixement de a, b i c.

Per això no ha d'estranyar que el coneixement dels angles d'un triangle hiperbòlic ens determini també la seva àrea.

Sense entrar en detalls diguem que l'àrea d'un triangle (i, per descomposició, de qualsevol figura) es pot definir de manera semblant a les longituds i angles (cf. Definicions 1.9 i 1.10). Concretament tenim:

PROPOSICIÓ 3.12. *Existeix una única manera d'assignar un nombre real positiu $f(\Delta)$ a cada triangle de manera que*

i) A algun triangle Δ_0 li correspon el nombre 1.

ii) A triangles congruents corresponen nombres iguals.

iii) Si el triangle Δ està compost dels triangles $\Delta_1, \cdots, \Delta_n$ llavors $f(\Delta) = f(\Delta_1) + \cdots + f(\Delta_n A)$.

A aquest nombre se li diu àrea del triangle.

Que Δ estigui compost de triangles $\Delta_1, \cdots, \Delta_n$ vol dir que la unió d'aquests triangles és Δ i que dos d'ells o són disjunts o tenen un vèrtex en comú o una aresta en comú.

No demostrarem aquesta proposició (cf. [**1**]).

Direm tan sols que qualsevol funció que compleixi ii) i iii) és de la forma

$$f(\Delta) = k \cdot D(\Delta)$$

on k és una costant i $D(\Delta)$ és el *defecte* del triangle Δ és a dir

$$D(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$

on α, β i γ són les magnituds dels angles de Δ.

La condició i) determina llavors la constant k.

En Geometria Euclidiana es relacionen les unitats de longitud i d'àrea exigint que el quadrat de costat unitat tingui àrea 1.

En Geometria Hiperbòlica es relacionen també ambdues unitats per un procediment semblant, encara que una mica més complex. Diguem tan sols que la relació entre aquesta constant k i la constant R que apareix en calcular la distància hiperbòlica en el model de Poincaré (cf. Teorema 3.10) està donada per $k = R^2$. Així l'àrea d'un triangle en el model de Poincaré està donada per

$$f(\Delta) = R^2 D(\Delta).$$

En particular no existeixen triangles d'àrea arbitràriament gran.

Bibliografia

[1] N. V. EFIMOV. *Geometria Superior*. Editorial Mir. Moscú