SCM/Notícies

Juliol 1995. Número 2

Report de la Junta

EMS-2000

Els dies 8, 9 i 10 de juny va visitar Barcelona la comissió de l'EMS (Societat Europea de Matemàtiques) destinada a fer-se càrrec *in situ* de les circumstàncies que envoltarien l'organització del Congrés Europeu de Matemàtiques de l'any 2000 (EMC-2000) en cas que es celebrés aquí, segons la candidatura presentada per la SCM a finals de desembre de 1994.

La comissió ens va fer avinent que, ultra la candidatura de la SCM, hi havia les de Copenhaguen, Torí i Brighton. De les quatre candidatures, la de la SCM és l'única que s'ha presentat dues vegades. La selecció d'una d'aquestes candidatures correspon al Comitè Executiu de l'EMS. La decisió es prendrà l'octubre d'enguany, segons s'informa a la *Newsletter* núm. 16 de l'EMS.

La visita va ser organitzada, malgrat el curt temps de què disposàvem, amb la intenció que els nostres visitants (Aatos Lahtinen, de la Universitat d'Hèlsinki i tresorer de l'EMS, i Mireille Chaleyat-Maurel, de la Universitat de París i cap de relacions públiques de l'EMS) es poguessin fer càrrec, d'una manera raonablement acurada, dels aspectes més rellevants de la nostra comunitat matemàtica, del suport amb el qual la nostra Societat podria comptar (especialment per part de les universitats) si tingués la responsabilitat d'organitzar l'esmentat Congrés, i de la idoneïtat indiscutible de la infraestructura de la ciutat.

Tot seguit relacionem les institucions que vam visitar, i les autoritats que en cada cas ens van rebre i ens van acompanyar, segons l'ordre temporal en el qual es van produir les visites: l'Institut d'Estudis Catalans, on vam mantenir una reunió de treball amb el vice-president, i delegat de l'IEC a la SCM, Manuel Castellet; la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, on ens va rebre la degana, Marta Sanz; la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya, on ens va rebre el degà, Joan Solà-Morales; la Universitat Politècnica de Catalunya, on primer ens va rebre el rector, Jaume Pagès, i després vam fer una visita al *campus* acompanyats del vice-rector de Política Acadèmica, Lluís Jofre, i de Joan Solà-Morales; i la Universitat Autònoma de Barcelona, on ens van rebre el vice-rector d'Ordenació Acadèmica, Julià Cufí, i el director de la Secció de Matemàtiques de la Facultat de Ciències, Joan Girbau. També vam visitar el Palau de Congressos.

És el moment d'expressar el nostre agraïment a les institucions i autoritats que hem mencionat, així com a les moltes persones que ens van ajudar d'una manera o altra durant (i després de) la visita.

Actualment estem treballant en l'elaboració d'un dossier, destinat als membres del Comitè Executiu de l'EMS, en el qual s'inclouran còpies de les cartes de suport a la candidatura, enviades per diverses autoritats al president de l'EMS, i detalls sobre les línies bàsiques en les quals basaríem l'organització del Congrés.

Atès que la voluntat de la SCM és que el Congrés sigui un esdeveniment de tota la comunitat matemàtica catalana, hem demanat als degans de les dues facultats de Matemàtiques, al director de la Secció de Matemàtiques de la UAB i al cap d'estudis d'Empresarials de la Universitat Pompeu Fabra que deleguin sengles representants per contribuir a l'elaboració de l'esmentat dossier.

Olimpíada Matemàtica

La SCM organitza cada any, per acord amb la Real Sociedad Matemática Española, la fase catalana de l'Olimpíada Matemàtica. Tanmateix, el repte per al curs 1995-96 és més gran, com ja s'ha comentat a **SCM/Notícies/1**: la nostra Societat s'encarregarà d'organitzar les proves finals de la XXXII celebració d'aquesta contesa.

La fase espanyola a la Rovira i Virgili

Per a cercar un escenari per la XXXII Olimpíada, vam visitar el rector de la Universitat Rovira i Virgili per indagar si aquesta Universitat tindria interès a acollir l'esdeveniment. La reacció va ser molt positiva, i podem avançar que la fase estatal de la XXXII Olimpíada Matemàtica tindrà lloc els dies 22, 23 i 24 de febrer de 1996 a la Universitat Rovira i Virgili.

Per a dur a terme l'organització, s'ha decidit formar dues comissions: la Comissió de Programa i la Comissió Local. De la composició i de les tasques més específiques de cada una us n'informarem en un proper número de **SCM/Notícies**.

Preparació de la fase catalana

Pel que fa a la coordinació de la fase catalana, la SCM l'ha encarregada a J. Grané, del Departament de Matemàtica Aplicada II de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Aprofitem per a recordar que la SCM vol contribuir a elevar el nombre i la qualitat dels estudiants de Catalunya que participen a l'Olimpíada. És per això que durant els mesos d'octubre i novembre es tornaran a fer les sessions de preparació per a tots els alumnes que hi puguin assistir.

Nogensmenys, ens hem plantejat la forma d'ampliar l'abast d'aquesta actuació. Per descomptat que el material que es treballa en les sessions presencials es trametrà, com en les anteriors ocasions, a tots els centres que el demanin. Per altra banda, estem preparant, amb l'ajut del PIE (Programa d'Informàtica Educativa del Departament d'Ensenyament), bústies telemàtiques de consulta i orientació sobre temes de l'Olimpíada, a les quals tindran accés tots els centres de Catalunya. De tot això, i d'altres qüestions relacionades, us n'informarem més específicament el setembre.

Agraïments

Volem agrair a J. Trias i a J. L. Ruiz, ambdós del Departament de Matemàtica Aplicada II de la Universitat Politècnica de Catalunya, el seu desinteressat ajut. J. Trias ha escrit un programa de PostScript amb el qual hem generat el logotip de la Societat. No és encara la versió definitiva, però clarament la seva qualitat és superior a la de les reproduccions per escànner que vam emprar en els números 0 i 1. Per a més detalls, vegeu la nota que ha escrit per a la secció d'Eines Informàtiques. I J. L. Ruiz ha seguit treballant amb `scm.cls` (vegeu **SCM/Notícies/1**) i n'ha augmentat notablement la seva funcionalitat, i ha col·laborat generosament i àmplia per fer possible que pugueu tenir el Butlletí/10 juntament amb aquest número de **SCM/Notícies**.

Ensenyament secundari

Mestratge de Matemàtiques per a Ensenyants (UAB)

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

- *Destinataris*: professors de matemàtiques d'ensenyament secundari amb independència de la llicenciatura que hagin cursat.
- *Durada*: 2 anys i un total de 32 crèdits, que seran tinguts en compte pel Departament d'Ensenyament per a la promoció del professorat d'ensenyament secundari.
- *Organització*: 12 assignatures amb continguts independents, cadascuna de les quals dóna 3'2 crèdits. Cada any se n'ofereixen només 6, que es van alternant en anys consecutius. Tanmateix, cada persona interessada es podrà matricular del nombre d'assignatures que vulgui i completar el mestratge en més de dos cursos. La realització de cada matèria estarà condicionada a la matriculació d'un nombre suficient de participants.
- *Preinscripció*: Fins al dia 20 de setembre de 1995. És un requisit necessari per a poderse matricular. Caldrà abonar 2.000 PTA per assignatura. La data de la matrícula s'anunciarà oportunament i es farà després del començament de les classes.
- *Preus de la matrícula*: 13.000 PTA per assignatura, de les quals es descomptaran les 2.000 PTA avançades en la preinscripció.
- *Informació*: Secretaria del Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 – Bellaterra.

  Horari: de 10:30 a 13:30 h i de 15:30 a 16:30 h.

  Telfs. 581.13.04 / 581.11.37.
- *Primer Semestre 1995-96*:
  - Complements d'Àlgebra per a l'ensenyament secundari.
    Prof. M. Castellet, dimarts de 19 a 21 h.
  - Complements de Probabilitats i Estadística per a l'ensenyament secundari.
    Profs. J. L. Solé i J. Vives, dijous de 18 a 20 h.
  - Rudiments de Topografia i Astronomia de posició.
    Prof. J. Llibre, dimarts de 17 a 19 h.
- *Segon Semestre 1995-96*:
  - Utilització del programa informàtic MATHEMATICA.
    Prof. G. Guasp, dimarts de 19 a 21 h.
  - Geometria elemental: euclidiana i no euclidiana.
    Prof. E. Gallego, dijous de 18 a 20 h.
  - Models matemàtics: equacions diferencials i processos iteratius.
    Prof. Calsina, dimarts de 17 a 19 h.
- *Assignatures que es faran el curs 96-97*: Complements de geometria analítica. Complements de càlcul. Resolució de problemes. Història de les matemàtiques. Disseny de proves estadístiques. Economia matemàtica.

Formació en Matemàtiques per a Professors d'Educació Secundària (UB)

Curs de Màster. Facultat de Matemàtiques

Universitat de Barcelona

- *Destinataris*: Actuals i futurs docents en matemàtica no obligatòria, sobretot aquells que provenen d'estudis més allunyats de les matemàtiques.
- *Durada*: Es pot fer en un curs acadèmic o bé en dos i consta d'un total de 30 crèdits.
- *Organització*: Màster curricular: es compon de dos cursos de postgrau independents:
  - Postgrau de Formació en Àlgebra–Aritmètica–Geometria–Topologia [AAGT];
  - Postgrau de Formació en Anàlisi–Estadística–Matemàtica aplicada–Probabilitat [AEMaP].

  Els dos postgraus són independents i donen dret als corresponents certificats de postgrau; la superació d'ambdós dóna dret, a més, al certificat de màster.

Cadascun dels postgraus es divideix en dos semestres [1 d'octubre–10 febrer el primer i 20 febrer–31 maig el segon] de catorze setmanes cada un. Un curs de postgrau constitueix una unitat i cal realitzar-la durant un curs acadèmic.

Hi ha també la possibilitat de fer 8 crèdits, com a mínim, la superació dels quals dóna lloc a un certificat d'aprofitament.

- *Preinscripció*: del 19 al 22 de setembre de 1995. Les dates de matrícula s'anunciaran en la preinscripció.
- *Preus de la matrícula*: Màster: 80.000 PTA; un curs de postgrau: 40.000 PTA; certificat d'aprofitament: 20.000 PTA.
- *Informació*: Secretaria de la Facultat de Matemàtiques. Universitat de Barcelona. Gran Via de les Corts Catalanes, 585. 08007 BCN. Telfs. 402.15.97 /402.15.98/318.42.66 ext 2303.
- *Postgrau AAGT* (Dimarts)

  Primer Semestre 1995-96:

  - Geometria.
    Prof. resp. E. Casas.
    16h a 17h 30m.
  - Àlgebra i aritmètica.
    Prof. resp. À. Arenas i G. Pascual.
    17h 45m a 19h 15m.
  - Història de la matemàtica/Resolució de Problemes.
    Prof. resp. J. Pla, P. Viader.
    19h 30m a 21 h.

  Segon semestre 1995-96

  - Topologia i Geometria.
    Prof. resp. C. Curràs i E. Casas.
    16h a 17h 30m.
  - MATHEMATICA / Recursos docents en matemàtiques.
    Prof. resp. J. Elias i F. J. Soria / A. Aubanell.
    17h 45m a 19h 45m.
- *Postgrau AEMaP* (Dijous)

  Primer Semestre 1995-96

  - Anàlisi matemàtica.
    Prof. resp. J.Cerdà.
    15h 45m a 17h 15m.
  - MATHEMATICA / Recursos docents en matemàtiques.
    Prof. resp. J. Elias i F. J. Soria / A. Aubanell.
    17h 30m a 19h 30m.
  - Probabilitat i estadística.
    Prof. resp. F. Carmona i O. Julià.
    19h 30m a 21h.

  Segon Semestre 1995-96:

  - Modelització de la matemàtica.
    Prof. resp. G. Gómez.
    16h a 17h 30m.
  - Història de la matemàtica/Resolució de Problemes.
    Prof. resp. J. Pla, P. Viader.
    17h 45m a 19h 15m.
  - Fractals.
    Prof. resp. A. Benseny.
    de 19h 30m a 21h.

Publicacions de la FEEMCAT

Agraïm la tramesa del número 7 de la revista *BIAIX*, que edita la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT) i el número de Juny de 1995 del *Butlletí ADEMGI*, que publica l'Associació d'Ensenyants de Matemàtiques de les Comarques Gironines, integrada a la FEEMCAT.

Proves-cangur

Hem rebut comentaris favorables sobre la prova-cangur que, a manera d'orientació, va ser tramesa amb SCM/Notícies/1 als Centres, amb el suggeriment de passar-la a alumnes de 3r de BUP. La idea que va ser una prova interessant per a motivar el gust per fer problemes ens anima a continuar amb el projecte.

Per això, el mes de setembre s'enviarà als centres una segona prova orientativa que mantingui viu l'interès que ara ha despertat. Posteriorment, al llarg del curs 1995-96 i en el marc de la col·laboració amb el PIE que s'ha explicat en el **Report de la Junta**, es desenvoluparà el projecte-cangur previst a mitjà i llarg termini.

Eines informàtiques

El logotip de la SCM i el llenguatge PostScript

JOAN TRIAS
Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya
e-mail: `avtrias@ma2.upc.es`

El **logotip** provisional de la SCM que s'ha començat a usar en aquest número de **SCM/Notícies** s'ha programat directament en el llenguatge PostScript; posteriorment se n'han fet variants a diverses escales, s'han convertit a format PCX i finalment s'han inserit en el text amb les macros d'inclusió de gràfics DIB.STY (vegeu **SCM/Notícies/1**). El que es veu al costat és el logotip en les mides usuals de 3 cm de diàmetre; el programa permet de generar logotips de mida arbitrària i d'actuar sobre 32 punts de control per afinar-ne el disseny. Les barres centrals es podrien generar també en color.

PostScript és un llenguatge de descripció de pàgina extraordinàriament poderós que s'ha convertit ja en estàndard de sortida de molts programes, des de processadors de texts fins a eines de dibuix a mà alçada o de dibuix geomètric exacte (programes típicament matemàtics o de CAD); els grans programes de matemàtiques que són més populars, com són, per exemple, Mathematica, Maple o Matlab produeixen fitxers gràfics en format PostScript.

Per a números posteriors deixem la descripció de com podem utilitzar directament les possibilitats de PostScript amb propòsits d'il·lustració matemàtica, per tal de transformar i combinar en una mateixa pàgina d'altres il·lustracions ja produïdes per altres programes: la idea essencial és la d'aprofitar les possibilitats que ofereix PostScript per a fer fàcilment i a alt nivell **canvis de sistemes de coordenades**.

Justament aquesta és la possibilitat que hem utilitzat per a la programació del logotip, que segurament pot ser d'un cert interès per a un matemàtic, i aquest és l'únic aspecte que volem descriure aquí; en concret ens referirem només a la forma amb la qual n'hem generat el **text circular**, donant-ne només *la idea i sense entrar en excessius tecnicismes de programació*; la resta d'aspectes són de programació rutinària sense contingut geomètric destacable.

PostScript treballa amb un sistema de coordenades que, per defecte, té el seu origen a l'extrem inferior esquerre de la pàgina, els eixos són paral·lels, respectivament, als costats del paper i estan orientats de manera anàloga als del sistema de coordenades cartesianes; és molt fàcil de fer **canvis d'origen** i canvis de sistemes de coordenades per **rotació d'eixos** (horària o antihorària); així, per exemple, amb

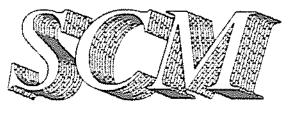
```
200 300 translation
```

produïm un canvi d'origen en el punt $(200, 300)$ del sistema de coordenades vigent (que podria ser resultat de canvis de sistemes anteriors), i ara aquest punt passa a ser el nou origen, de manera que si ara es dipositès un dibuix ja fet en el $(0,0)$ resultaria col·locat, en relació amb l'antic sistema de coordenades, en el punt $(200, 300)$; el poder d'això és enorme, ja que no ens cal recalcular el dibuix, només s'ha de calcular una única vegada per totes "en origen" o en "posició canònica" i es col·locarà a diversos llocs i en diverses posicions fent simplement canvis de sistemes de coordenades.

Si no es diu res en sentit contrari, que és possible, els canvis de sistema de coordenades es refereixen sempre a l'últim canvi, i són, per tant, acumulatius; podem fer tota classe de combinacions.

Aquests canvis afecten tot el que s'hagi de dibuixar i també tot el que s'hagi d'escriure (que és el mateix), i així, per exemple, amb el codi següent obtindríem un text i el seu traslladat:

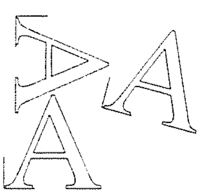
```
... (tecnicismes)
(ABCDEFGHI) show
200 300 translation
(ABCDEFGHI) show
... (tecnicismes).
```



En el dibuix annex podem veure un exemple en el qual, amb una simple iteració de **translacions**, produïm un efecte aparentment complicat, que pot semblar difícil d'obtenir. El codi corresponent al dibuix és tan simple com el que segueix; és possible que la senzillesa del codi quedi enfosquida per la necessitat d'obtenir unes lletres amb interior gris a mida que la iteració progressa i al final amb interior blanc, però això és només un detall cosmètic irrellevant: geomètricament, és simplement una seqüència de canvis d'origen que s'acumulen a l'immediatament anterior; a cada canvi "pronunciem" el mateix text "SCM", i així obtenim el resultat:

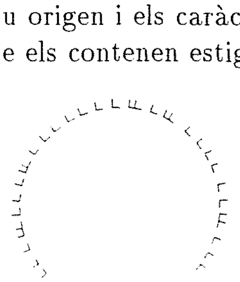
```
/Times-Italic findfont  230 scalefont setfont
/EscriureSCM {0 0 moveto (SCM)
   true charpath gsave .8 setgray fill grestore stroke} def
/EscriureSCM2 {0 0 moveto (SCM)
   true charpath gsave 1 setgray fill grestore stroke} def

80 60 translate
.9 -.1 0 %control de for
{
EscriureSCM  %gris
-5 2 translate
} for
EscriureSCM2 %blanc
showpage
```



Amb l'ordre `30 rotation` es produeix un canvi de sistema de coordenades per rotació antihorària de 30° dels eixos cartesians de coordenades; a l'esquema adjunt, si prescindim de tecnicismes, s'han dibuixat els caràcters diversos per canvis successius de sistemes de coordenades, sense que calgui girar els caràcters pròpiament dits.

Aquesta possibilitat s'utilitza per a obtenir text circular, com el del logotip de la Societat; a continuació en desciurem la idea bàsica. El text circular es diposita sobre una circumferència invisible, i la manera de ferho és combinar canvis d'origen i rotació d'eixos per establir una col·lecció de **sistemes de coordenades locals**, amb origen sobre la circumferència, als diversos llocs on hagin d'anar els caràcters del text; un cop fet aquest canvi de sistema de coordenades, i amb l'oportuna correcció de centrat, es "pronuncia" la lletra corresponent, que resta dipositada en la posició habitual però referida al nou sistema de coordenades; l'eix d'abscisses del nou sistema ha de ser tangent a la circumferència, l'eix d'ordenades ha de ser normal a la circumferència en el nou origen i els caràcters s'han de situar de manera que els eixos de simetria vertical de les caixes que els contenen estiguin alineats amb l'eix d'ordenades del sistema de coordenades local.



A l'esquema es pot veure un exemple de la col·lecció de sistemes de coordenades cartesians locals que es construeixen amb les ordres `translate` i `rotate`, tot dins d'una macro *automatitzada*, per tal de dibuixar text circular; no cal fer el procés artesanalment lletra per lletra: les macros anteriors accepten el text complet i s'ocupen de fer-ne la descomposició i la col·locació.

Notes didàctiques

D'acord amb l'orientació que volem donar a **SCM/Notícies**, que ha de recollir els interessos i inquietuds de les lectores i els lectors, s'inclou seguidament una reflexió de caràcter didàctic sobre el càlcul de límits que ens ha enviat J. Gas.

Ens podem adonar que la situació que es planteja se'ns presenta quan volem raonar quines són les asímptotes d'una hipèrbola. Si no sou prou conscients de la raó per la qual en surten dues de diferents o, altrament, si els vostres llibres de text no ho comenten prou explícitament, convé que llegiu aquest article.

Una errada molt freqüent en el càlcul de límits

JORDI GAS I RIERA
Professor Numerari de Matemàtiques
a l'I.P.F.P. de Tortosa (Tarragona)

Hi ha una errada que es comet sovint quan es calcula "mecànicament" el límit d'una funció quan $x \to -\infty$, si apareix alguna arrel quadrada en l'expressió de la funció, sobretot en indeterminacions de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Com que al llarg dels divuit anys que porto com a docent no he vist cap llibre de text on es tingui en compte aquesta errada, crec és d'interès comentar-la.

Com sabem, per calcular un límit d'aquest tipus es divideix el numerador i el denominador per la potència de major grau.

Així, per exemple:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{7x+1}{2x+\sqrt{4x^2-3x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{7x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{\sqrt{4x^2-3x}}{x}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{7x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}+\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{7+\frac{1}{x}}{2+\sqrt{4-\frac{3}{x}}} = \frac{7+0}{2+\sqrt{4}} = \frac{7}{4}$$

... però aquest no és pas el valor correcte del límit.

On és l'errada? Aquesta es troba quan s'introdueix la x dins l'arrel quadrada, ja que, com que tendeix a $-\infty$, x pren valors negatius i, per tant, per arreglar la fracció $\frac{\sqrt{4x^2-3x}}{x}$, que també pren valors negatius, ja que considerem la determinació positiva de l'arrel, s'ha de posar el signe menys davant de l'expressió radical: $-\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}}$.

Per tant, el procés per calcular correctament el límit és el següent:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{7x+1}{2x+\sqrt{4x^2-3x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{7x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{\sqrt{4x^2-3x}}{x}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{7x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}-\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{7+\frac{1}{x}}{2-\sqrt{4-\frac{3}{x}}} = \frac{7+0}{2-\sqrt{4}} = \frac{7}{0} = \infty$$

Per determinar el signe de l'∞ del límit, cal adonar-se que, si x és un nombre negatiu, l'expressió $2-\sqrt{4-\frac{3}{x}}$ és negativa.

Arribem, doncs, al resultat correcte del límit: $\lim_{x\to-\infty} \frac{7x+1}{2x+\sqrt{4x^2-3x}} = -\infty$.

Com es pot apreciar, la influència de l'errada que comentem sobre el resultat del límit és molt gran.

És important tenir en compte aquesta observació per a calcular, per exemple, les asímptotes horitzontals de la funció $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ per tal de fer la seva gràfica. En calcular el límit, s'ha de distinguir segons $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$, ja que els resultats són diferents.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = 1.$$

Per tant, per a $x \to +\infty$, la funció té com a asímptota horitzontal la recta $y = 1$. Per altra banda,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - 4x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = -1$$

Per tant per $x \to -\infty$ la funció té com a asímptota horitzontal la recta $y = -1$. Així, doncs, el fet de calcular amb cura el límit fa veure que aquesta funció té dues asímptotes horitzontals diferents, una quan $x \to +\infty$ i una altra quan $x \to -\infty$.

Problemes

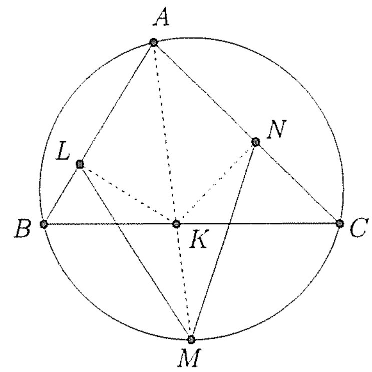
Problemes proposats

A9. Tenim donats al pla un triangle $A_1A_2A_3$ i un punt P_0. Definim $A_s = A_{s-3}$ per tot $s \geq 4$. Construïm una successió de punts $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ de manera que P_k és, per $k = 1, 2, \ldots$, la imatge de P_{k-1} en un gir antihorari de centre A_k i amplitud 120° Demostreu que si $P_{1986} = P_0$, llavors el triangle $A_1A_2A_3$ és equilàter.

A10. Sigui $p_n(k)$ el nombre de permutacions del conjunt $\{1, 2, \ldots, n\}$ que tenen exactament k elements fixos. Demostreu que

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k) = n!\,.$$

A11. En un triangle acutangle ABC la bisectriu interior de l'angle A talla el costat BC al punt K i el cercle circumscrit al punt M. Des del punt K es tracen perpendiculars KL i KN a AB i AC, respectivament, on posem L i N per a designar els peus de les esmentades perpendiculars. Demostreu que el quadrilàter $ALMN$ i el triangle ABC tenen la mateixa àrea.



A12. Sigui $n \geq 3$ un enter. Demostreu que existeix un conjunt de n punts al pla tal que la distància entre cada parell de punts del conjunt és irracional, i que cada terna de punts del conjunt determina un triangle no degenerat d'àrea racional.

Comentari. A l'enunciat del problema **A7** (vegeu **SCM/Notícies**/1), cal afegir-hi el paràgraf següent: "En les competicions esportives, s'anomena *mitjana de gols fallats* el quocient entre el nombre de gols fallats i el nombre total de llançaments realitzats; en aquest problema la mitjana es dóna *arrodonida* amb tres decimals."

Solucions dels problemes A1-A5

Habitualment donarem solucions dels problemes proposats al número k de **SCM/Notícies** al número $k+2$. Seguint aquesta regla, tot seguit trobareu solucions dels enunciats plantejats a **SCM/Notícies/0**. Afanyeu-vos, si us plau, a enviar solucions dels problemes de **SCM/Notícies/1**.

A1. Demostreu que si a l'equació

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a, b i c són enters senars, les arrels són, forçosament, irracionals.

Observació. L'enunciat del problema no és del tot correcte, ja que calia parlar d'*arrels reals* en lloc d'*arrels*.

Solució (FRANCESC BORREL, I.B. Salvador Espriu, Salt). Les arrels seran irracionals si $b^2 - 4ac \in \mathbb{Z}$ no és un quadrat perfecte. Si suposem el contrari, $b^2 - 4ac = x^2$ i com que b^2 és senar, resulta que x^2 és senar i també x. Com que $x - b$ és parell podem posar $x = b + 2s$ (amb $s \in \mathbb{Z}$), i substituint i simplificant, queda $-ac = s(b+s)$. El primer membre d'aquesta igualtat és senar, i per tant també el segon; això implica que s i $b+s$ són senars, però com que b és senar, ha de ser s parell, contradicció.

Altres idees. També es pot resoldre observant que el discriminat $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'equació, ha de ser 5 (mod 8) si a, b, c són senars. Però un quadrat perfecte només pot ser 0, 1 o 4 (mod 8). ∎

A2. Demostreu que si α_1 i α_2 són les arrels de l'equació $x^2 - 6x + 1 = 0$, llavors, per a tot $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1^n + \alpha_2^n$ és un enter no divisible per 5.

Solució (Redacció). Fent $r_n = \alpha_1^n + \alpha_2^n$, per $n \geq 0$, queda $r_0 = 2$, $r_1 = 6$, $r_2 = 34$. Un simple càlcul mostra que els r_n compleixen la recurrència $r_n = 6r_{n-1} - r_{n-2}$. La mateixa recurrència considerada mòdul 5 dóna $r_0 = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = 4$ i $r_n = r_{n-1} - r_{n-2}$. Però aquesta darrera relació dóna $r_n = -r_{n-3}$, de manera que la sucessió dels r_i és $r_0, r_1, r_2, -r_0, -r_1, -r_2, r_0, r_1, \ldots$ i cap dels seus termes és 0.

Altres idees. F. BORRELL observa que els r_n són parells i pot fer un raonament semblant mòdul 10.

A. GOMÀ usa "normes". Posa $||a + b\sqrt{2}|| = a^2 - 2b^2$, que és una funció multiplicativa. Com que $\alpha_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ i $\alpha_2 = 3 - 2\sqrt{2}$, $||\alpha_1|| = ||\alpha_2|| = 1$. Posant $\alpha_1^n = a + b\sqrt{2}$, queda $\alpha_2^n = a - b\sqrt{2}$ i $||\alpha_1^n|| = ||\alpha_1||^n = 1 = a^2 - 2b^2$. De $\alpha_1^n + \alpha_2^n = 2a$ deduïm que només cal veure que a no pot ser múltiple de 5. Però $a^2 = 1 + 2b^2$ i donant a b valors mòdul 5 es comprova el que volem. ∎

A3. Demostreu que, per a tot primer $p > 2$, el numerador m de la fracció

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}$$

és divisible per p (Teorema de Wolstenholme).

Solució (F. BORRELL) Com que $(p-1)!$ no és divisible per p ja que aquest és primer, només caldrà veure que el numerador de la fracció, és a dir,

$$\hat{1}\,2 \cdots (p-1) + 1\,\hat{2} \cdots (p-1) + 1\,2 \cdots \widehat{(p-1)}$$

és múltiple de p. És fàcil de comprovar que els $p-1$ sumands de l'expressió són tots diferents mòdul p i, per tant, són exactament $1, 2, \ldots, p-1$ mòdul p. La seva suma és $p \cdot \frac{p-1}{2}$ que és 0 mòdul p.

Altres idees. LLUÍS BIBILONI (UAB) dóna una solució semblant, observant que la congruència de Wilson diu que els sumands esmentats són precisament $-1^{-1}, -2^{-1}, \ldots, -(p-1)^{-1}$, tots ells diferents mòdul p.

El problema admet un refinament ja que es pot demostrar que si $p > 3$, el numerador és múltiple de p^2. ∎

A4. Tenim $n > 1$ llums disposats en forma circular $L_0, L_1, \cdots, L_{n-1}$. Un llum pot estar encès o apagat. A partir de L_0 es fa una successió d'accions S_j de la següent forma:

i) L'acció S_j afecta només el llum L_j (l'estat dels altres no canvia).

ii) Si L_{j-1} és encès, S_j canvia l'estat de L_j.

iii) Si L_{j-1} és apagat, S_j no canvia l'estat de L_j.

Els llums estan indexats mòdul n. Inicialment els llums estan encesos. Demostreu:

a) Existeix un enter positiu $M(n)$ tal que després de $M(n)$ passos tots els llums tornen a estar encesos.

b) Si $n = 2^k$, llavors $M(n) = n^2 - 1$.

c) Si $n = 2^k + 1$, llavors $M(n) = n^2 - n - 1$.

Solució (oficial de la 34th IMO, Istanbul). Designem per $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ el vector amb components 0 o 1 que indica l'estat dels llums $L_0, \ldots, L_{n-1}$. L'acció S_0 és, en aritmètica binària, $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \to (v_{n-1} + v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$; l'acció S_1 és $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \to (v_0, v_0 + v_1, \ldots, v_{n-1})$; i així successivament. Si indiquem per R la transformació "rotació a l'esquerra" que fa $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \to (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_0)$, resulta $S_1 = R^{-1} S_0 R$, i també, per inducció, $S_i = R^{-i} S_0 R^i$. El producte d'accions successives S_i és

$$\begin{aligned} P_{k-1} &= S_{k-1} S_{k-2} \cdots S_1 S_0 = \\ &= R^{-k} (R S_0)^k = R^{-k} T^k \end{aligned}$$

si fem $T = RS_0$.

a) Hem de veure que el vector $\vec{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ es transforma en ell mateix per una certa P_s; però com que $R(\vec{1}) = \vec{1}$, és necessari i suficient veure que $T^s(\vec{1}) = (\vec{1})$ per un cert s. De fet, és suficient veure que una certa potència de T és la identitat. De matrius $n \times n$ binàries n'hi ha un nombre finit (2^{n^2}); les sucessives potències T^i arribaran a repetir-se i tindrem $T^r = T^s$ per uns certs $r < s$. Com que T és una transformació invertible, traient factor comú T^r resulta $T^{s-r} = I$ i la part a) queda demostrada.

b) La matriu de T és

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i els seu polinomi característic, desenvolupant per la darrera columna resulta $x^n - x^{n-1} - 1$; pel teorema de Hamilton-Cayley la matriu T compleix

$$T^n - T^{n-1} - I = 0.$$

Recordant que a $\mathbb{Z}_2$ elevar al quadrat o a una potència de 2 una suma equival a elevar els sumands separadament i sumar, i calculant successivament, surt $T^{n^2} = (T^{n-1} + I)^n = T^{n(n-1)} + I$ ja que n és potència de 2. Traient factor comú T^{n^2-n} resulta $T^{n^2-n}(T^n - I) = I$, d'on, $T^{n^2-n}T^{n-1} = T^{n^2-1} = I$.

c) Es demostra igual que el cas b), modificant els càlculs convenientment. $T^{n^2-n} = T^{n(n-1)} = (T^{n-1} + I)^{n-1} = T^{(n^2-2n+1)} + I$ ja que $n-1$ és potència de 2. Traient factor comú T^{n^2-2n+1} resulta $T^{n^2-2n+1}(T^{n-1} + I) = I$ d'on $T^{n^2-2n+1}T^n = T^{n^2-n+1} = I$.

Observacions. Aquesta solució, que pot canviar-se fàcilment a una altra sense recurs de transformacions lineals, operant directament a l'anell $\mathbb{Z}_2[X]/(X^n - X^{n-1} - 1)$, és relativament senzilla d'entendre si es poden usar, de forma coneguda i automàtica, les tècniques habituals de l'àlgebra lineal o dels anells de polinomis. Hi ha d'altres solucions que resulten de comptar directament sobre els estats dels llums, que requereixen menys tècnica, però que resulten molt més difícils d'intuir i d'escriure rigorosament. En un proper **SCM/Notícies**, donarem la solució apareguda a la revista *Mathematical Mayhem* i també una altra de semblant que ens ha fet arribar F. BORRELL. ■

A5. A cada casella d'un escaquer $n \times n$ hi ha un llum. En ser tocat un llum, aquest llum i tots els situats a la seva fila i columna canvien d'estat (passen d'apagat a encès i recíprocament). Inicialment són tots apagats. Demostreu que sempre és possible, amb una successió escaient de tocs, que tot l'escaquer quedi encès, i calculeu, en funció de n, el nombre mínim de tocs per tal que s'encenguin tots els llums.

Solució (Redacció, amb idees de F. BORRELL). Si toquem una vegada cada casella de l'escaquer, cada llum canviarà $2n-1$ vegades, i com que aquest valor és senar, quedaran tots els llums encesos. Amb n^2 tocs segur que tenim una solució que encén tots els llums.

Si es fan menys de n tocs, hi haurà algun element en una fila i columna que no quedarà tocat, i per tant el llum corresponent no s'encendrà. En conclusió, el nombre de tocs ℓ ha de ser més gran o igual que n, i per tant el nombre total de tocs ℓ ha d'estar entre n i n^2.

Si n és senar i es fan n tocs resseguint una fila o columna, tots els llums de les altres files i columnes s'encendran, i els de la fila i columna resseguides rebran un nombre senar de tocs i quedaran encesos. En conclusió, si n és senar, el mínim nombre de tocs és n.

Si n és parell cal demostrar que el mínim nombre de tocs necessaris és n^2. Observem: a) Tocar dues caselles diferents produeix un efecte sobre els llums que és independent de l'ordre en què s'han tocat. b) Tocar dues vegades la mateixa casella no produeix cap efecte. En conclusió, d'una sèrie de tocs es poden treure els tocs repetits i es pot canviar l'ordre dels tocs.

Considerem la matriu $n \times n$ que té entrades a_{ij} iguals a 1 o 0 segons que s'hagi fet un toc a la casella i, j. Siguin f_i, c_j les sumes de les files i i columna j. Resulta evident que el nombre total de tocs és $\ell = \sum_1^n f_i = \sum_1^n c_j$. D'altra banda, el nombre de tocs que afecten la casella i, j, que ha de ser senar, és $f_i + c_j - a_{ij} = 2r + 1$. Sumant aquesta expressió per totes les i queda $\sum_1^n f_i + nc_j - \sum_i a_{ij} = 2s + n$, o bé $\sum_1^n f_i + (n-1)c_j = 2s + n$. En aquesta expressió, si $\sum f_i$ fos senar, hauria de ser c_j senar; però llavors el mateix raonament seria vàlid per a tots els c_j i, essent tots senars, la suma $\sum c_j$ seria parell ja que té un nombre parell n de sumands. Això és absurd ja que aquesta suma és precisament $\sum f_i$, senar per hipòtesi. Per tant han de ser $\sum f_i$ i c_j parells. Aplicant el mateix raonament a tots els f_i i els c_j resulten tots parells. De la igualtat $f_i + c_j - a_{ij} = 2r + 1$ resulta que a_{ij} és senar i per tant és 1, per a tot i, j. Calen, doncs, n^2 tocs per a encendre tots els llums. ■

Premis

Premi Betancourt-Perronet atorgat a Núria Piera

El 18 de maig propassat l'ambaixador francès a Espanya, André Gadaud, va comunicar a Núria Piera Carreté, del Departament de Matemàtica Aplicada II de la Universitat Politècnica de Catalunya, que havia estat guardonada amb el premi científic franco-espanyol Jean-Rodolphe Perronet-Augustin de Betancourt.

Aquest premi, que s'atorga anualment, va ser instituït el 1993 entre el Ministeri d'Educació i Ciència, d'una banda, i, de l'altra, el Ministeri d'Afers Estrangers i el Ministeri de l'Ensenyament Superior i de la Recerca. El seu propòsit és afavorir el desenvolupament de la cooperació científica entre Espanya i França, i es destina a científics "la notorietat internacional dels quals és indiscutible; que estan exercint en l'actualitat la seva activitat científica; que han contribuït fortament al desenvolupament de relacions científiques entre Espanya i França; i que mantenen projectes de cooperació prometedors pel futur dels seus equips".

La candidatura de Núria Piera havia estat presentada pel professor Alain Costes, director del Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes del CNRS de Tolosa de Llenguadoc (França).

Hem demanat al Prof. Josep Aguilar, director de Recerca al CNRS i membre del LAAS, actualment invitat al Dept. ESAI, que ens en faci una semblança per a l'ocasió:

> Núria Piera Carreté és llicenciada en matemàtiques per la Universitat de Barcelona i doctora en informàtica per la Universitat Politècnica de Catalunya. Des de febrer de 1991 és professora titular de matemàtica aplicada a la Universitat Politècnica de Catalunya.
>
> Els seus treballs d'investigació es centren en dos grans eixos: el raonament qualitatiu i la síntesi d'informacions; han estat objecte de diverses publicacions en revistes de prestigi internacional.
>
> Des del principi de la seva carrera com a investigadora el 1981, Núria Piera ha mantingut una estreta col·laboració amb el Laboratoire d'Architecture et Analyse des Systèmes (LAAS) del Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) a Tolosa, on ha treballat ininterrompudament des del 1988 fins al 1991, en col·laboració amb el Dr. Aguilar-Martin i la Dra. Travé-Massuyès.
>
> En tornar a Barcelona el 1991, N. Piera propicia l'obertura d'una nova línia d'investigació a la Universitat Politècnica de Catalunya: raonament qualitatiu i tecnologies de la decisió, i crea un grup d'investigació, GREC (Grup d'Investigació en Enginyeria del Coneixement), que dirigeix, en el qual participen professors de diversos departaments de la UPC (Matemàtica Aplicada II, Enginyeria de Sistemes i Informàtica Industrial, Matemàtica Aplicada III), així com professors i investigadors d'altres universitats o centres d'investigació (ESADE, IIIA-CSIC, centre CIM, ...), i és precisament la diversitat en la formació dels seus membres la que permet afrontar la interdisciplinarietat pròpia de la problemàtica de l'anomenat *knowledge Engineering*, especialment en els dominis del raonament qualitatiu, l'aprenentatge i la intel·ligència artificial aplicades als problemes de l'automàtica.
>
> El juny de l'any 1994, crea el col·lectiu ARCA (Aproximacions via Raonament Qualitatiu i Aplicacions) que ella presideix, format per grups d'investigació de diverses universitats interessats en el raonament qualitatiu, que manté una estreta col·laboració amb el seu homòleg francès MQ&D.
>
> El juny del 1993 organitza a Barcelona el III-IMACS international Workshop on Qualitative Reasoning and Decision Technologies - QUADET'93, i comparteix la presidència d'aquest congrés.
>
> Actualment està organitzant, mitjançant l'ARCA i conjuntament amb el grup francès MQ&D, el segon fòrum europeu sobre raonament qualitatiu, que reuneix tots els grups europeus interessats en aquest camp i que es desenvoluparà a Barcelona el proper mes d'octubre.

Fe d'errades

Al número anterior de **SCM/Notícies** es donava la notícia que dos concursants catalans havien obtingut medalles a la XXXI Olimpíada Matemàtica, fase espanyola, però amb el nom d'un d'ells erroni. El nom correcte del concursant que va obtenir una medalla de plata és *Joaquim* Puig Sadurní. Li reiterem la nostra felicitació.

Agenda

CRM

Seminari Bishop

El Prof. Dr. Alan J. Bishop, de la Monash University (Clayton, Victoria, Australia) impartirà, del 12 al 15 de setembre de 1995 el seminari **Matemàtiques i ensenyament: Principis i estat de la questió.**

Aquest seminari, organitzat conjuntament pel CRM (IEC) i el Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals (UAB), i coordinat per Núria Gorgorio, constarà de les conferències següents:

L'important paper de la visualització en l'ensenyament de les matemàtiques (ens. primari i secundari): 12 de setembre a les 17 h, Centre de Lectura de Reus. C. Major, 15, Reus.

La dimensió social de l'ensenyament de les matemàtiques: 13 de setembre, a les 12 h, Centre de Recerca Matemàtica, Facultat de Ciències, UAB.

Les matemàtiques com a part integrant de la cultura. Implicacions en la formació dels futurs ensenyants: 14 de setembre, a les 12 h, Centre de Recerca Matemàtica, Facultat de Ciències, UAB.

L'assistència a les conferències es gratuïta, no cal matricular-s'hi. Per a més informació, adreceu-vos a:

Centre de Recerca Matemàtica
Tel.: 581-1081.

CEDYA/CMA

Del 18 al 22 de setembre de 1995 es celebrarà a Vic (Barcelona) el Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones (CEDYA) / Congreso de Matemática Aplicada (CMA), promogut, amb caràcter bianual, per la Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA). Per a més informació, dirigiu-vos al:

Comitè Organitzador del XIV CEDYA / IV CMA
Estudis Universitaris de Vic
C/. Miramarges, 4. 08500 Vic
FAX: (93) 889.10.63
e-mail: `cedya@maia.ub.es`

Tesis doctorals

- JOAQUIM ORTEGA CERDÀ va llegir la seva tesi, dirigida per Joaquim Bruna i Floris i titulada *Varietats de zeros i successions d'interpolació*, el dia 10 de juliol a la Universitat Autònoma de Barcelona.
- ROSA PERAIRE DURBÀ va llegir la seva tesi, dirigida per Eduard Casas i Alvero i titulada *Geometria local de corbes*, el dia 10 de juliol a la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona.

SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES

President	Sebastià Xambó Descamps
Vice-Pres.	Joaquim Ortega Aramburu
Tresorer	Josep Pla Carrera
Secretari	Antoni Gomà Nasarre
Vocals	Jaume Aguadé Bover
	Claudi Aguadé Bruix
	Josep Grané Manlleu
	Anna Pol Masjoan
	Pelegrí Viader Canals
Delegat de l'IEC	Manuel Castellet Solanas

Comunicacions

Carrer del Carme, 47
08001 Barcelona
Tel. **318 5516**
Fax **412 2994**
e-mail `scm@ma2.upc.es`
`sxd@ma2.upc.es`

Secretaria Neus Portet
Horari Dilluns, de 10 a 14 h
Dimarts, de 15 a 19 h

SCM/Notícies
Juliol 1995. Número 2

Edita:
Societat Catalana de Matemàtiques
(filial de l'Institut d'Estudis Catalans)

Comitè de Redacció
Sebastià Xambó Descamps
Antoni Gomà Nasarre
Josep Grané Manlleu
Carles Casacuberta Vergés

Aquesta publicació ha estat preparada amb $\LaTeX2_\varepsilon$, controlat per la classe de document `scm.cls` desenvolupada per José Luis Ruiz.

Índex

En el marc de la campanya per a augmentar el nombre de socis de la SCM, incloem en cada número de **SCM/Notícies** una butlleta d'inscripció i d'actualització de dades.

Feu-la servir sempre que us calgui comunicar-nos un canvi de dades personals.

També us preguem que, si ho considereu avinent, la doneu a altres persones o institucions (departaments, seminaris, etc.) que puguin estar interessats en les tasques que desenvolupa la SCM.

Societat Catalana de Matemàtiques

Sol·licitud d'inscripció com a soci o actualització de dades

Dades del/la sol·licitant

Tipus de soci: Ordinari ☐ Estudiant ☐ Institució ☐
cal acreditació

Nom i cognoms : ____________________
o denominació de la institució

Adreça: ____________________ Telèfon: __________

Codi postal: ______ Població: ____________________

Lloc d'estudi o de treball: ____________________

____

. . . .

Butlleta per a domiciliar la quota de soci de la SCM

El sotasignant autoritza que anualment es faci efectiu el rebut de soci de la Societat Catalana de Matemàtiques a nom de ____________________

a la llibreta d'estalvi/compte corrent/targeta de crèdit que s'indica seguidament:

Titular del compte: ____________________

Entitat bancària: ____________________

Codi de l'entitat bancària: |_|_|_|_|

Adreça de l'oficina: ____________________

Codi de l'oficina i dígits de control: |_|_|_|_| |_|_|

Número del compte o llibreta: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Data: ____________________ DNI: __________

Firmat: ____________________

Firma

SCM/Notícies/2
Edita la Societat Catalana de Matemàtiques
Filial de l'Institut d'Estudis Catalans